МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

П.А. Кочетков

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МОСКВА 2000

УДК 512
К 75

Кочетков П.А. ***Краткий курс высшей математики***: Учебное пособие. - М.: МГИУ, 2000. - 98 с.

Учебное пособие предназначено для студентов-заочников инженерных специальностей.

Редактор З.И. Фадеева

ЛР № 020407 от 12.02.97.

Подписано в печать 10.12.99.	Сдано в производство 10.12.99.
Формат бумаги $60 \times 90/16$	Бум. множит.
Усл. печ. л. 6,25 Уч.-изд. л. 6,36	Тем. план 1999 г., № 3-33
Тираж 500	Заказ №

РИЦ МГИУ, 109280, Москва, Автозаводская, 16

ISBN 5-276-00029-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Элементы теории множеств

Под множеством понимают некоторую совокупность элементов, объединенных по определенным признакам.

Примеры:

1. Совокупность студентов в данной аудитории образует множество.
2. Все целые положительные числа 1,2,...,n,... образуют множество натуральных чисел N.

Множества состоят из элементов. Принадлежность элемента x множеству A записывается следующим образом: $x \in A$. Если элемент x не принадлежит множеству A, то это записывается так: $x \notin A$.

Множество A

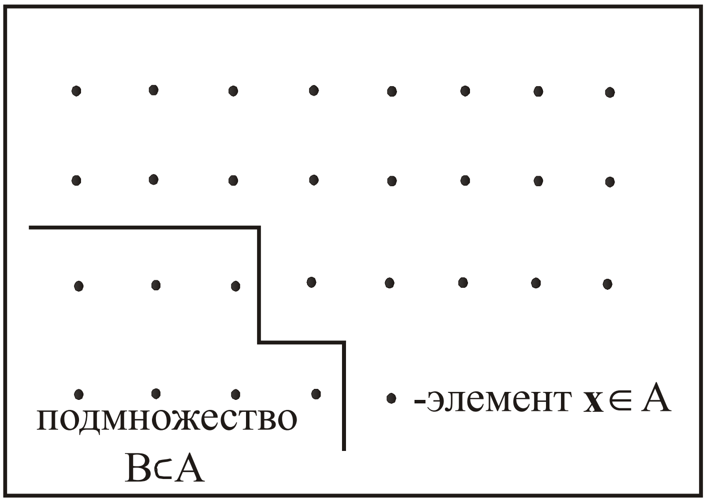


Рис. 1. Геометрическое изображение множества A и подмножества B

Множество B называется ***подмножеством*** множества A, если все элементы множества B являются элементами множества A. То, что B является подмножеством множества A, записывается так: $A \subset B$ (рис. 1).

Введем понятие пустого множества, т.е. множества, в котором не содержится ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество содержится в любом множестве, т.е. $\varnothing \subset A$.

Объединением (суммой) множеств $A_к$ (k = l, 2,....,n) называется множество S, которое состоит из всех элементов множеств $A_к$, т.е. если $x \in S$, то $x \in A_к$ хотя бы при одном к.

Объединение множеств $A_к$ (к = 1,2,…,n) обозначается символом

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} A_k . \qquad (1.1)$$

Пересечением (произведением) множеств $A_к$ (к =1,2,...,n) называется множество P, которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно всем множествам $A_к$, т.е. если $x \in P$, то $x \in A_к$ при всех к=1,2,...,n.

Пересечение множеств $A_к$ (к = 1,2,...,n) (рис. 2) обозначается символом

$$P = \bigcap_{k=1}^{n} A_k . \qquad (1.2)$$

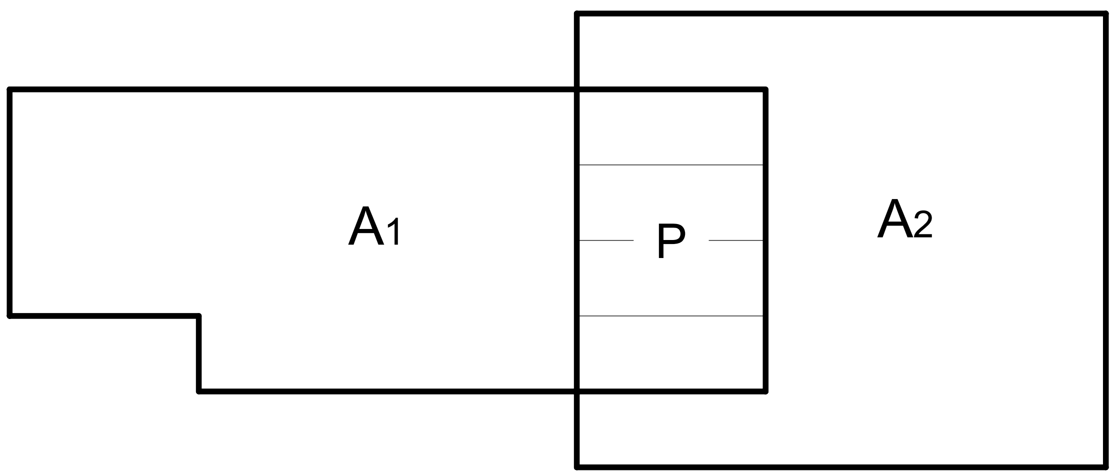


Рис. 2. Геометрическое изображение пересечения множеств A_1 и A_2

Пример.

Пусть A_1 – множество студентов-девушек; A_2 – множество студентов-юношей в группе. Объединение $S = A_1 \bigcup A_2$ – множество студентов.

Рассмотрим два множества A и B. Говорят, что задана функция f, если каждому элементу $x \in A$ поставлен в соответствие определенный элемент $y \in B$. Обозначим такое соответствие так: $y = f(x)$ (рис. 3).

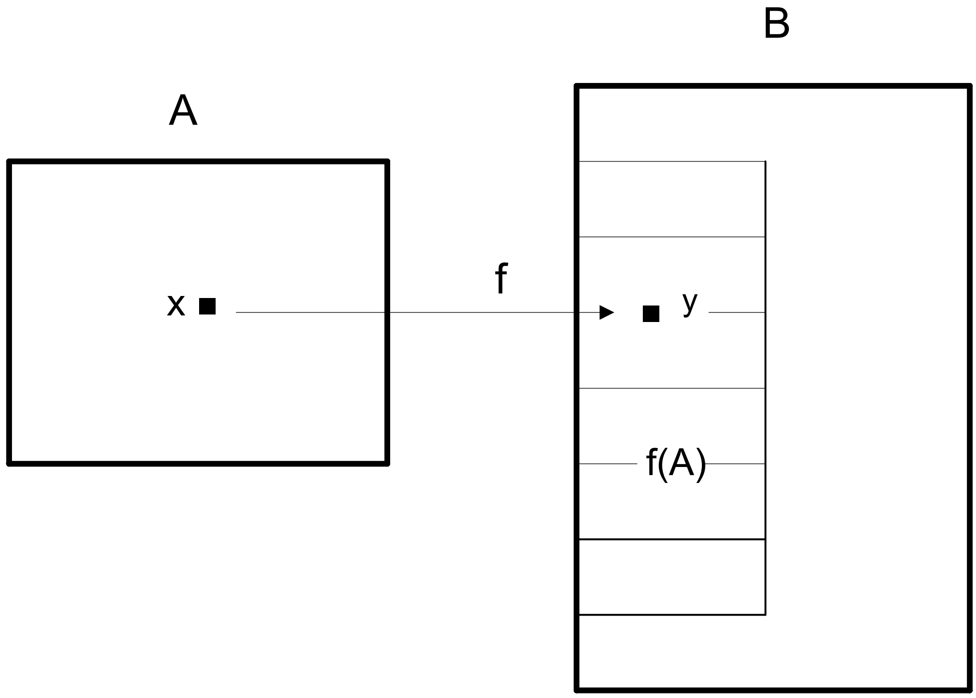


Рис. 3. Множества A и B. Множество значений f(A)

Множества A и B называются ***эквивалентными***, если существует взаимно однозначное отображение множества A на множество B. Эквивалентность множеств A и B записывается символом A~B.

Множество A называется ***счетным***, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел N.

2. Вещественные и комплексные числа

2.1. Вещественные числа

Натуральные числа *N*: 1,2,...,n,... – целые положительные числа.

Целые числа P: ... -2,-1,0,1,2,... – все отрицательные и положительные целые числа и ноль.

Рациональные числа *Q* можно представить в виде $q = p/n$, где p и n – целое и натуральное числа.

Рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, т.е.

$$q = a_0, a_1, \ldots ,a_n \text{ или } q = a_0, a_1, \ldots ,a_n(a_n). \qquad (2.1)$$

Иррациональные числа *Z* представимы только в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, т.е.

$$z = a_0, a_1, \dots , a_n, \dots \tag{2.2}$$

К иррациональным числам относятся:

1. Основание натурального логарифма $e \approx 2{,}7182\dots$
2. Число $\pi \approx 3{,}14159\dots$

Все рациональные и иррациональные числа образуют множество ***вещественных чисел*** R.

Между вещественными числами и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждой точке числовой прямой можно всегда указать определенное вещественное число и наоборот (рис. 4).

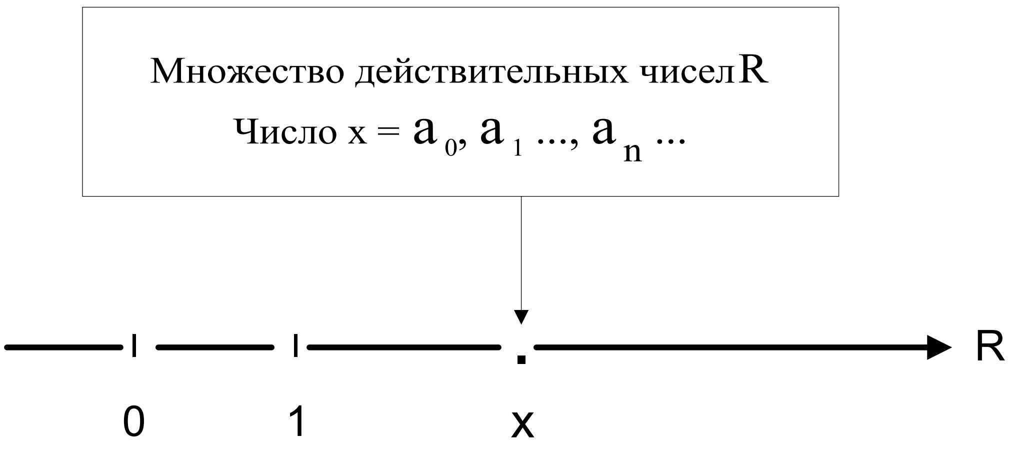


Рис. 4. Взаимно однозначное соответствие между вещественными числами и точками прямой

2.2. Комплексные числа

Комплексным числом *z* называется упорядоченная пара (x, y) вещественных чисел x и y.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются ***равными*** в том и только в том случае, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Сумма и произведение комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ определяются соответственно равенствами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{2.3}$$

Введем обозначение i = (0,1). В силу равенств (2.3) $i^2 = -1$. Тогда любое комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy. \tag{2.4}$$

Вещественное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется ***модулем*** комплексного числа z.

Пусть $z = x + iy$. Введем угол φ следующими соотношениями:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\varphi; \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\varphi. \qquad (2.5)$$

Угол φ называется ***аргументом*** комплексного числа z.

С учетом соотношений (2.5) комплексное число z можно представить в ***тригонометрической форме****:*

$$z = |z|\,(\cos\varphi + \sin\varphi). \qquad (2.6)$$

С учетом соотношений (2.5) можно получить формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (2.7)$$

3. Числовые последовательности

Числовой последовательностью *$\{a_n\}$* называется однозначное отображение множества натуральных чисел N во множество действительных чисел R. Это определение можно представить так: $\varphi(n) = a_n$. Другими словами, числовая последовательность $\{a_n\}$ – это пронумерованное множество действительных чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Число a называется ***пределом*** последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что для всех $n \ge N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ (рис. 5).

Это определение записывают в виде

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \qquad (3.1)$$

Если последовательность ***сходится к пределу а***, то она называется ***сходящейся***, в противном случае последовательность называется ***расходящейся***.

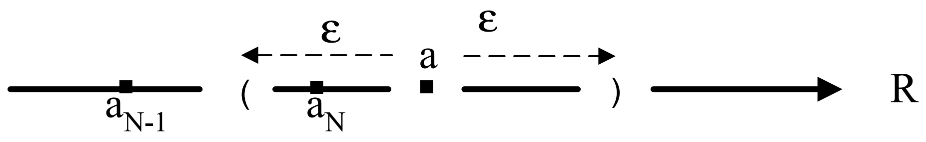


Рис. 5. Графическое представление ε-окрестности точки a

ПРИМЕРЫ

1. Последовательность $\{1/n\} = 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ сходится к нулю.
2. Последовательность $\{n\}$ является расходящейся.
3. Последовательность $\{(n+1)/n\}$ сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} \{(n+1)/n\} = 1$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+1}{3-2n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+1/n^3}{3/n^3-2} = -\dfrac{1}{2}$, т.к. $1/n^3$ и $3/n^3 \to 0$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{3n}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3}-1/\sqrt{n}} = 1/\sqrt{3}$, т.к. $1/\sqrt{n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Критерий сходимости Коши. Последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для всех $n, m \geq N$ имеет место неравенство $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

ПРИМЕРЫ

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{3+2n^2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-\sqrt{4}}{2\sqrt{n}+3n}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n\sqrt{n}-8}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+2})$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+n^3+3n^2}{2n^3+4n-8}$.

4. Числовые функции. Предел и непрерывность функции

4.1. Числовая функция

Числовая функция вещественного переменного x – это закон или правило, по которому каждому числу x некоторого числового подмножества A множества вещественных чисел R ставится в соответствие определенное число y числового подмножества $B \subset R$.

Числовые функции вещественного переменного обычно задаются с помощью ***формул*** вида *y = f(x)*.

Графиком функции *y = f(x)* называется множество точек плоскости $\{x, f(x)\}$, ордината y и абсцисса x которых связаны соотношением $y = f(x)$ (рис. 6).

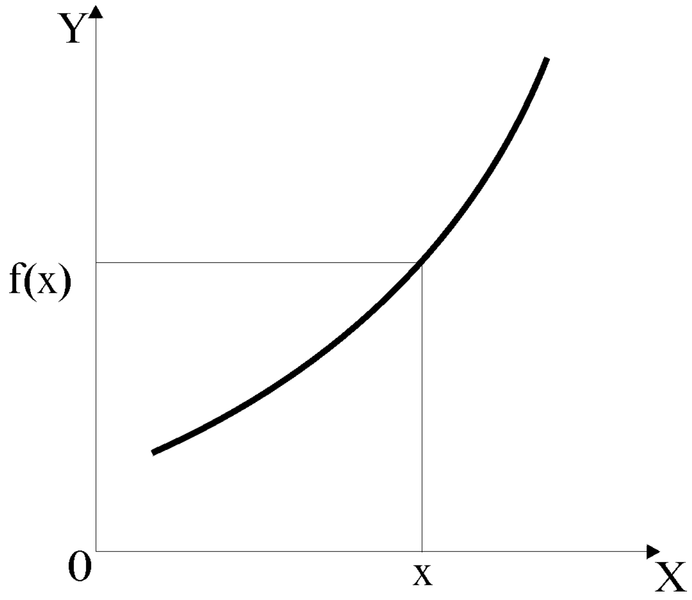


Рис. 6. Графическое представление функции y = f(x)

Функция y = f(x) называется ***монотонно возрастающей*** на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, причем $x_1 < x_2$, следует: $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция y = f(x) называется ***монотонно убывающей*** на некотором промежутке, если для x_1 и x_2 из этого промежутка, где $x_1 < x_2$, следует: $f(x_1) > f(x_2)$.

4.2. Предел и непрерывность функции

Число А называется ***пределом функции*** *y = f(x)* ***при x → a***, если для любого ε >0 найдется такое число δ > 0, что и для всех x, удовлетворяющих условию $0 <| x-a |< \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|< \varepsilon$.

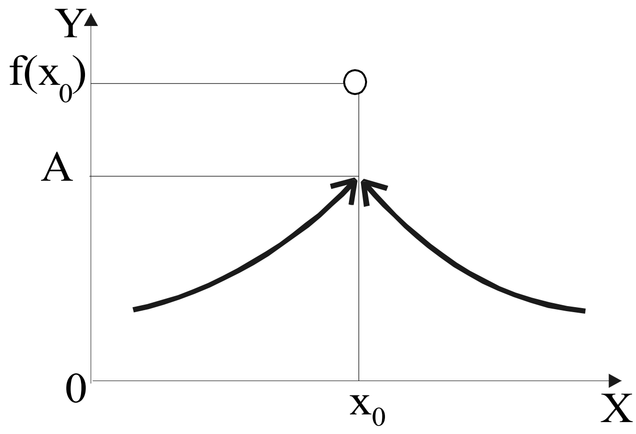
Если эти требования выполнены, то пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Функция α(x) называется *бесконечно малой при x→a*, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \mathbf{0}$**.**

Функция f(x) называется ***непрерывной в точке x_0***, если выполняется $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция называется ***непрерывной на множестве*** *X,* если она непрерывна в каждой точке x этого множества X.

В противном случае функция y = f(x) имеет разрыв в точке x_0 (рис. 7).



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \text{ но } f(x_0) \neq A$$

Рис. 7. Разрыв функции y = f(x) в точке x_0

Точка, в которой функция f(x) не является непрерывной, называется ***точкой разрыва функции*** *f(x)* (это точки x_0, x_1, x_2 на рис. 8).

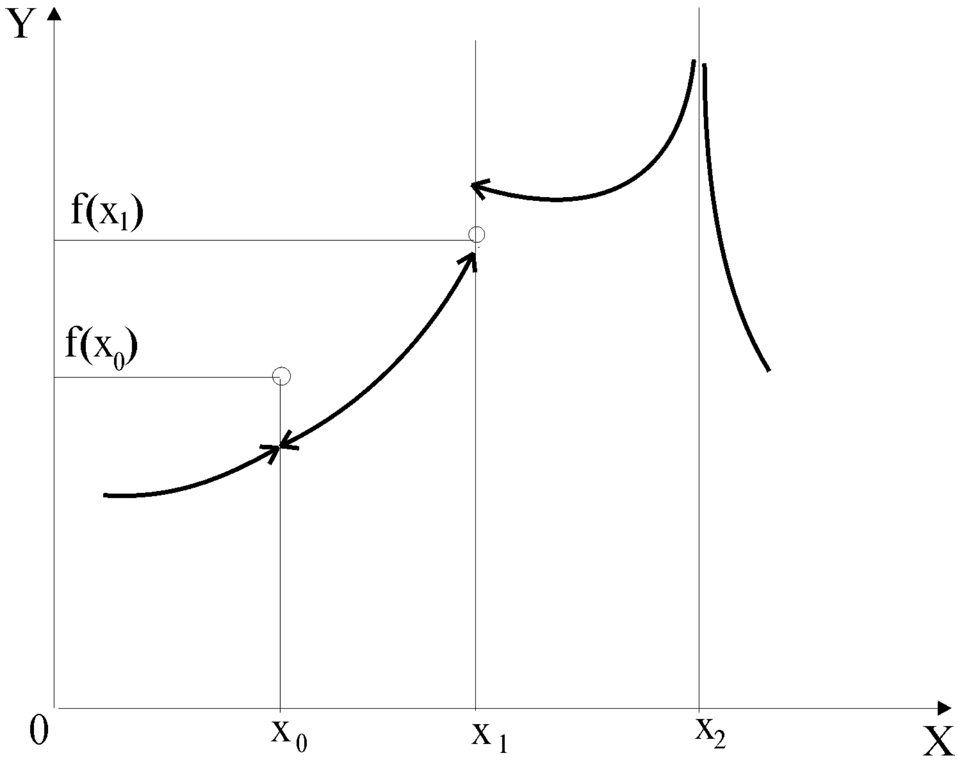


Рис. 8. Разрывы функции y = f(x): в точке x_0 – устранимый разрыв; в точке x_1 – разрыв 1-го рода; в точке x_2 – разрыв 2-го рода

Вычисление некоторых пределов:

1-й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

2-й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^{x}=e,$

где e - основание натурального логарифма (e ≈ 2,718).

Примеры:

Вычислить пределы функций:

1. $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5x^2}{4x^2+3}=\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty}\dfrac{3/x-5}{4+3/x^2}=-\dfrac{5}{4};$

2). $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\operatorname{Lim}\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(3x)}{x^2}=9\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(3x)}{(3x)^2}=9;$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-2/x)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-2/x)^{-x/2\cdot(-6)}=e^{-6}.$

ЗАДАНИЕ

Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4x^3}{3x^3+7};$	5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2};$
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2x^2}{4x+3x^2};$	6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin 3x}{\operatorname{tg}^3 2x};$
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{tg}(2x)}{\sin^2(3x)};$	7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{3x}};$
4) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^{-2x};$	8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}.$

5. Дифференцирование функций одного переменного

5.1. Понятие производной

Пусть $y = f(x)$ определена на некотором множестве X и $x_0 \in X$.

Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то этот предел называется <u>производной</u> функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$.

Операция вычисления производной функции называется ***дифференцированием.***

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется ***дифференцируемой в точке x_0***.

Функция, дифференцируемая в каждой точке x множества X, называется дифференцируемой на множестве X.

Замечания:

1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.
   Функция $y = f(x)$, непрерывная в точке X_0, не обязательно дифференцируема в этой точке.

Механический смысл производной. Пусть точка движется вдоль пути S. Тогда $S = f(t)$ – путь, пройденный точкой за время t.

Тогда $\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t)$ – путь, пройденный точкой за отрезок времени $(t, t + \Delta t)$.

Отношение $\frac{\text{ÄS}}{\text{Ät}} = \frac{f(t + \text{Ät}) - f(t)}{\text{Ät}}$ – средняя скорость точки на отрезке $(t, t+\Delta t)$.

Тогда $\lim\limits_{\text{Ät}-0} \frac{\text{ÄS}}{\text{Ät}} = S'(t) = V(t)$ – мгновенная скорость точки в момент времени t.

Геометрический смысл производной. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 (рис. 9). Можно показать, что тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке x_0 равен производной функции в этой точке, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.

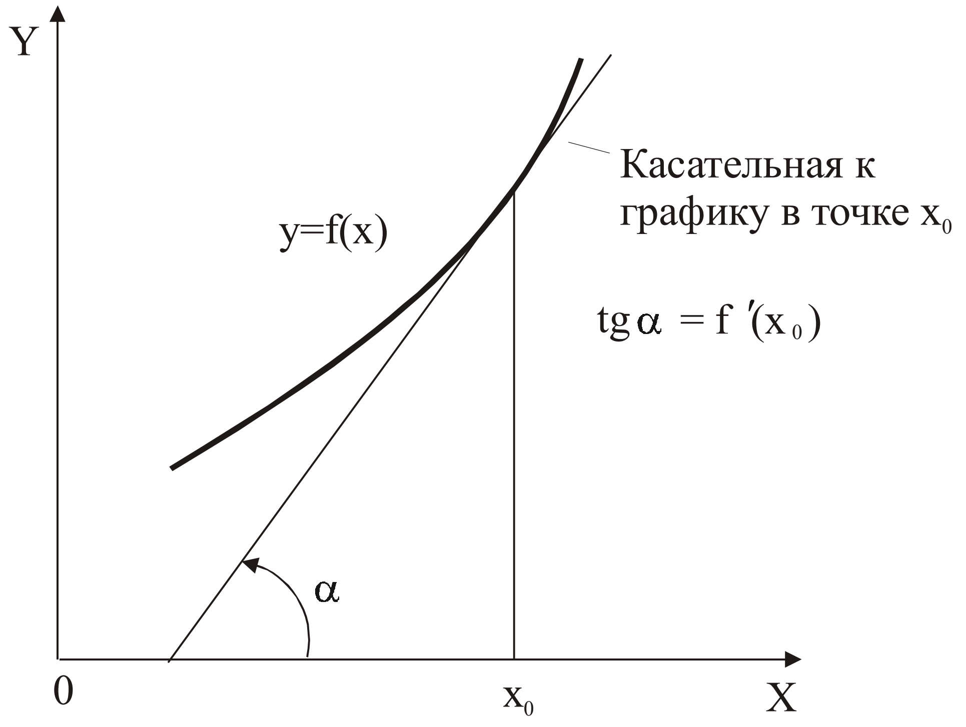


Рис. 9. Геометрический смысл производной

Правила дифференцирования:

1. $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$, где C – вещественное число;
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Дифференцирование сложной функции. Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $g(t)$ дифференцируема в точке $t_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $y = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

$$y'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Дифференциал функции. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая дифференцируема в точке x. Придадим x приращение Δx и рассмотрим соответствующее приращение функции

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ – бесконечно малая часть приращения функции при $\Delta x \to 0$, а линейная часть приращения функции $f'(x)\Delta x$ называется ***дифференциалом*** функции f(x) в точке x: $df(x) = f'(x)\Delta x$.

***Производные от элементарных функций*:**

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;
3. $(\ln x)' = 1/x$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
7. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
8. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $(\mathrm{arctg}\, x)' = -(\mathrm{arcctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Примеры:

1. $(2^{\cos x} + x^3)' = 2^{\cos x} \cdot \ln 2 \cdot (-\sin x) + 3x^2$;
2. $(\ln x \cdot \sin x)' = \dfrac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x$;
3. $\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{x^2}\right)' = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot x^2 - \mathrm{tg}x \cdot 2x}{x^4}$.

***Задачи. Продифференцировать функции*:**

1. $(\cos(\ln x))'$; 2. $(3^{\sin x} + \sqrt{x})'$; 3. $(\cos x^3 + \sqrt{\mathrm{tg}\, x})'$; 4. $(2^x \cdot \ln^2 x)'$;
5. $(\arcsin x^2)'$; 6. $\left(\dfrac{2^x}{x^2}\right)'$; 7. $(\mathrm{arctg}\, 4^x)'$;
8. $(x^4 \cdot \mathrm{tg}\, x)'$; 9. $\left(\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\sqrt{x}}\right)'$; 10. $(\mathrm{tg}^3 5^x)'$

5.2. Исследование функций

Пусть функция f(x) дифференцируема на интервале (а, б). Если для любого x из этого интервала $f'(x) > 0$, то функция f(x) ***возрастает*** на этом интервале (рис. 10).

Если же для любого x из этого интервала $f'(x) < 0$,то функция f(x) ***убывает*** на этом интервале.

Функция f(x) имеет в точке x = a ***локальный максимум*** (см. рис.10), если для любого x из малой окрестности этой точки выполняется

$$f(a) > f(x).$$

Функция f(x) имеет в точке x = a ***локальный минимум***, если для любого x из малой окрестности этой точки выполняется

$$f(a) < f(x).$$

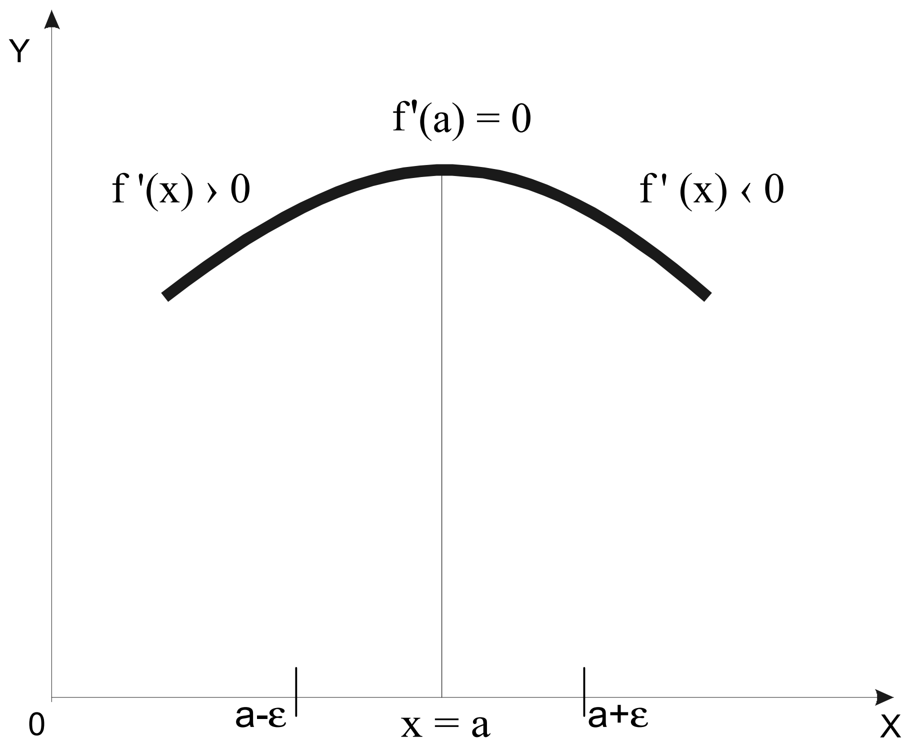


Рис. 10. Возрастание и убывание функции f(x)

Теорема Ферма. Необходимое условие существования экстремума.

Если функция f(x) имеет в точке x = a локальный максимум или минимум ***(локальный экстремум)*** и дифференцируема в этой точке, то выполняется $f'(a) = 0$ (см. рис. 10).

Теорема. Достаточное условие существования экстремума.

Пусть функция y = f(x) дифференцируема на интервале (a-ε, a+ε), за исключением, быть может, точки a.

Тогда если $f'(x) < 0$ при $a-\varepsilon < x < a$ и $f'(x) > 0$ при $a < x < a+\varepsilon$, то в точке a – локальный минимум.

Если же $f'(x) > 0$ при $a-\varepsilon < x < a$ и $f'(x) < 0$ при $a < x < a+\varepsilon$, то в точке a – локальный максимум (см. рис. 10).

Пример 1.

Определить интервалы возрастания и убывания функции $y = 4x - 3 - x^2$. Установить точку локального экстремума.

Решение.

Производная функции: $y' = 4 - 2x = 2(2 - x)$.

$y' > 0$ при $x < 2$, т.е. при $x < 2$ функция возрастает.

$y' < 0$ при $x > 2$, т.е. при $x > 2$ функция убывает.

При $x = 2$ $y' = 0$, т.е. $x = 2$ является точкой максимума функции.
В точке $x = 2$ $y(2) = 1$.

Пример 2.

Определить интервалы возрастания и убывания функции $y = xe^{-x}$. Найти точку экстремума этой функции.

Решение.

Производная функции: $y' = e^{-x} – x\cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$.
При $x < 1$, $y > 0$ – функция возрастает, при $x > 1$, $y' < 0$ – убывает.
При $x = 1$, $y' = 0$ – функция имеет максимум: $y(1)= e^{-1}$.

ЗАДАНИЕ

Исследовать и построить графики функций $y = x^2 + 2x - 3$;

$$y = x\cdot e^{-2x};$$

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

6. Неопределенный и определенный интегралы

6.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция F(x), определенная на числовом множестве X, называется первообразной для функции f(x), если для любого $x \in X$ выполняется

$$F'(x) = f(x).$$

Очевидно, что если F(x) – первообразная для f(x), то F(x) + C (где C – любое действительное число) также первообразная для f(x).

Совокупность всех первообразных для функции f(x) называется ***неопределенным интегралом*** от функции f(x) и обозначается

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx\,.$$

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$;
2. $(\int f(x)\,dx\,)' = f(x)$;
3. $\int c\cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$;
4. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \;\; (n \neq -1)$;
2. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;
9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

6.2. Определенный интеграл

Рассмотрим функцию y = f(x), определенную на отрезке [a, b]. Осуществим разбиение отрезка [a, b] точками $a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n = b$ на n отрезков $[a_к, b_к]$. Обозначим это разбиение буквой T. Выберем внутри каждого отрезка $[a_к, b_к]$ произвольную точку $x_к$, значение функции в этих точках будет равно $f(x_k)$ (рис.11).

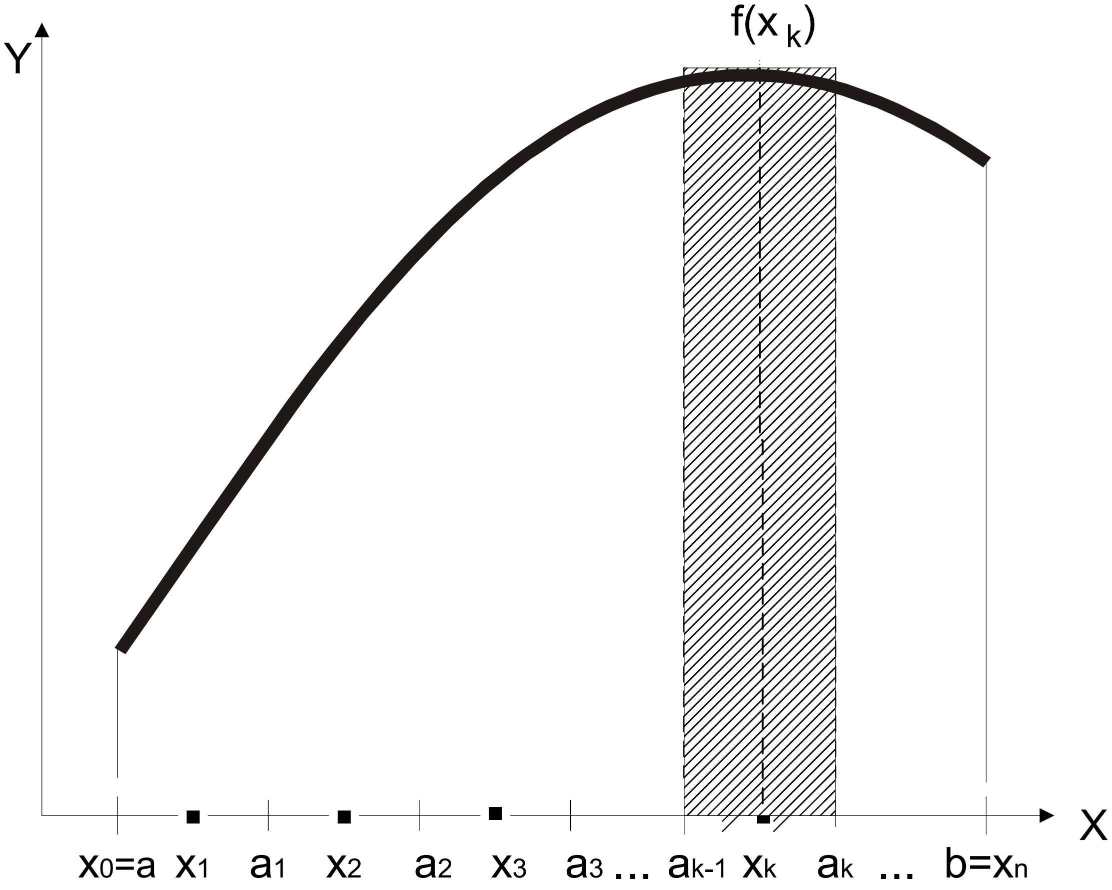


Рис. 11. Построение интегральной суммы

Построим ***интегральную сумму***: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = S(T)$.

Если существует предел этой интегральной суммы при стремлении максимальной длины отрезка разбиения к нулю, т.е. при max $\Delta x_k \to 0$, то этот предел называется ***определенным интегралом*** от функции f(x) и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim S(T) \text{ при } \max \Delta x_k \to 0.$$

Свойства определенного интеграла:

1. Пусть функция f(x) интегрируема на отрезке [a,b], тогда она интегрируема на любом отрезке $[c,d] \subset [a,b]$.
2. Пусть $a < c < b$. Тогда если f(x) интегрируема на [a,b], то
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$
3. Пусть f(x) интегрируема на [a,b], а C – постоянная, тогда функция $C\cdot f(x)$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\int_a^b C\cdot f(x)\,dx = C\cdot\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

4. Пусть f(x) и g(x) интегрируемы на отрезке [a,b], тогда их сумма f(x) ± g(x) также интегрируема на [a,b] и

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

5. Пусть f(x) и g(x) интегрируемы на отрезке [a,b], тогда их произведение f(x) · g(x) также интегрируемо на этом отрезке.

Геометрический смысл определенного интеграла. Определенный интеграл численно равен ***площади криволинейной трапеции***, ограниченной сверху кривой y = f(x), снизу отрезком [a,b], а также двумя отрезками x = a и x = b (рис. 12).

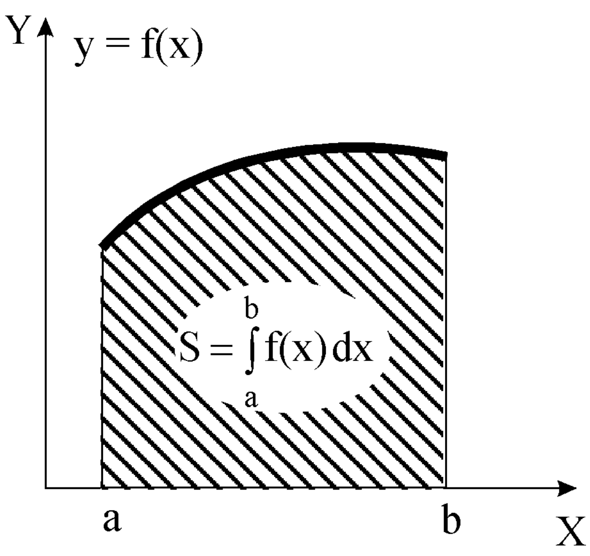


Рис. 12. Геометрический смысл определенного интеграла

Формула Ньютона-Лейбница. Формула устанавливает связь между первообразной F(x) для функции f(x) и определенным интегралом от этой функции:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Замечание.

Определенный интеграл существует:
- для непрерывных функций;
- для монотонных функций;
- для функций, ограниченных на отрезке и имеющих не более чем конечное число точек разрыва на рассматриваемом отрезке.

Вычисление длины кривой и объема тел вращения. Рассмотрим кривую y = f(x), определенную на отрезке [a,b] и имеющую на этом отрезке непрерывную производную (рис. 13). Тогда ***длину кривой*** y = f(x) вычисляем по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx .$$

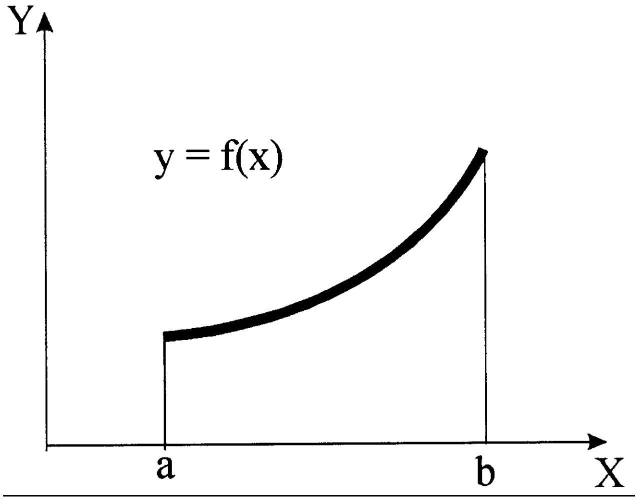


Рис. 13. Длина дуги и объем тела вращения

Объем тела, полученного при вращении этой кривой вокруг оси 0x, равен:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx .$$

Пример.

Найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^3$, отрезком $1 < x < 3$ и прямыми x = 1 и x = 3 (рис. 14).

$$S = \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = 20 \text{ (квад. ед.).}$$

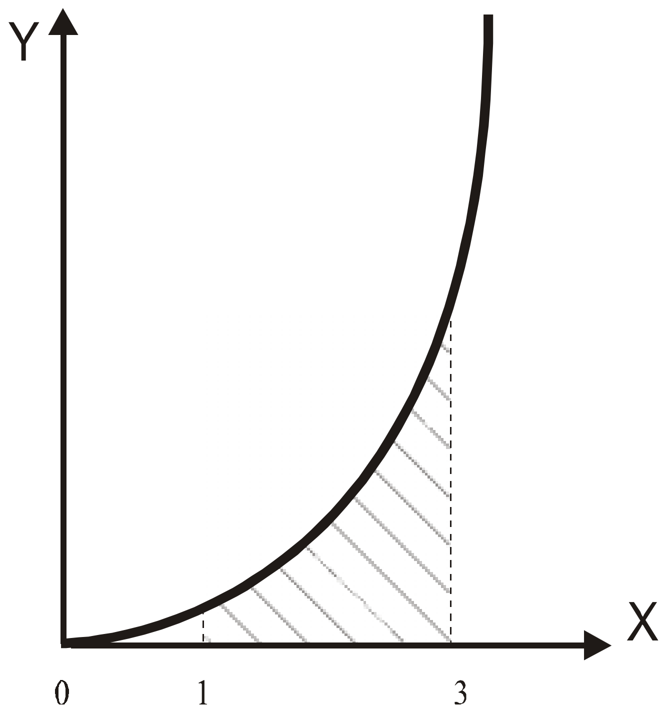


Рис. 14. Площадь криволинейной трапеции

Найти объем тела V, образованного при вращении этой кривой вокруг оси 0X.

$$V = \pi \cdot \int_1^3 x^6 dx = \pi \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_1^3 = \frac{\pi \cdot (3^7 - 1)}{7} \text{(куб. ед.)}.$$

ЗАДАНИЕ

Вычислить площадь плоской фигуры и объем тела вращения, ограниченных:

1. Кривой $y = \sqrt{x}$, отрезками [4, 8] и прямыми x = 4, x = 8.
2. Кривыми $y = x^2$ и $y = x^3$.
3. Кривой y = 1/x, отрезками [1, 3] и прямыми x = 1 и x = 3.

РАЗДЕЛ 2

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

7. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

7.1. Векторы. Операции над векторами

Вектором называется направленный отрезок **AB** с начальной точкой A и конечной точкой B. Иногда вектор обозначают одной буквой **a**. ***Длиной*** |**AB**| вектора **AB** называется число, равное длине отрезка AB. Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются ***коллинеарными*** (рис. 15).

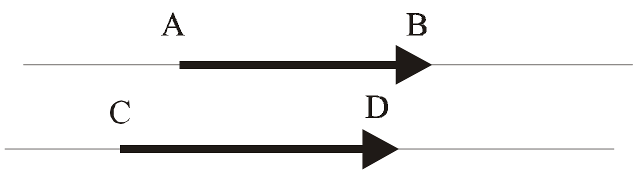


Рис. 15. Коллинеарные векторы AB и CD

Операции над векторами:

а) если вектор AB умножить на действительное число C, то получим новый вектор DE, который коллинеарен вектору AB, длина его в C раз больше, и при C > 0 вектор DE направлен в ту же сторону , а при C < 0 в противоположную вектору AB.

б) если сложить векторы AB и DE , то получим вектор KL, который станет третьей стороной AE в треугольнике AB(D)E.

Скалярным произведением двух векторов a и b называется число

$$(a, b) = |a|\,|b| \cos \varphi, \qquad (7.1)$$

где φ – угол между векторами a и b (рис. 16).

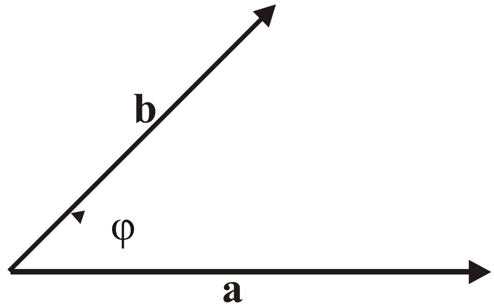


Рис. 16. Скалярное произведение векторов a и b

Векторным произведением векторов a и *b* называется вектор c:

$$c = [a \cdot b] \qquad (7.2)$$

такой, что (рис. 17):

1. Длина вектора $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами a и b.
2. Вектор c перпендикулярен a и b.
3. Векторы a, b, c образуют правую тройку векторов, т. е.

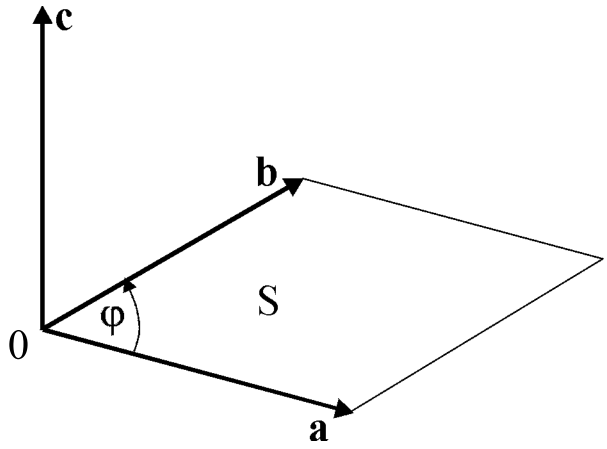


Рис. 17. Векторное произведение векторов a и b: c = [a·b]

Длина вектора c численно равна площади параллелограмма S.

7.2. Линейно независимые системы векторов. Базис. Системы координат

Элементами (векторами) n-мерного пространства R^n являются совокупности из n действительных чисел $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Система векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ называется ***линейно зависимой***, если существуют действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, одновременно не равные нулю, для которых выполняется соотношение

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0. \qquad (7.3)$$

Если для векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ нельзя указать числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, чтобы выполнялось условие (7.3), то эти векторы называются ***линейно независимыми.***

Базисом в пространстве R^n называется любая система n линейно независимых векторов $a_1, a_2, ..., a_n$.

Следует отметить, что любой вектор b из R^n можно представить в виде ***линейной комбинации*** базисных векторов:

$$b = b_1 a_1 + b_2 a_2 + ... + b_n a_n\ . \qquad (7.4)$$

Здесь $b_1, b_2, ..., b_n$ – координаты b по отношению к базису ($a_1, a_2, ..., a_n$).

В двухмерном пространстве R^2 базис образуют любые два неколлинеарные векторы (обычно два взаимно перпендикулярные векторы, направленные вдоль осей O_x и O_y) (рис.18).

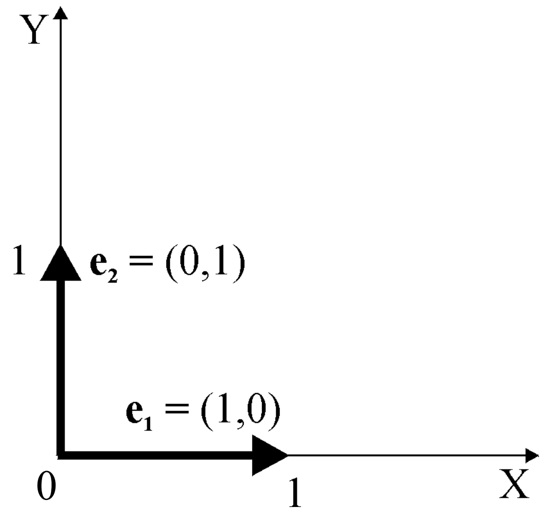


Рис. 18. Прямоугольная система координат в $\mathbf{R}^2$

Прямоугольная система координат *x, y, z* в R^3 представляет собой три взаимно перпендикулярные прямые ***(оси координат)***, проходящие через ***начало координат*** – точку 0 (рис. 19).

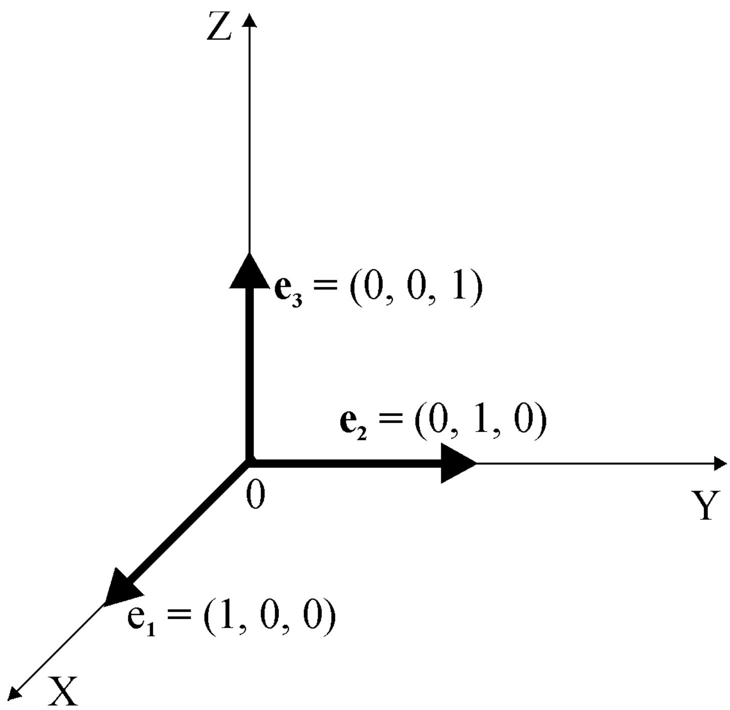


Рис. 19. Прямоугольная система координат

Базис называется ***ортонормированным***, если все его векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и по длине равны 1. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется ***декартовой прямоугольной системой координат.***

Пусть векторы a и b в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 можно разложить следующим образом:

$$a = a_x \cdot e_1 + a_y \cdot e_2 + a_z \cdot e_3;$$
$$b = b_x \cdot e_1 + b_y \cdot e_2 + b_z \cdot e_3.$$

Тогда скалярное произведение векторов a и b можно вычислить по формуле

$$(a, b) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \qquad (7.5)$$

Векторное произведение векторов a и b определяется по формуле

$$[a \cdot b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{matrix} e_1 \cdot (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) - \\ e_2 \cdot (a_x \cdot b_z - b_x \cdot a_z) + \\ e_3 \cdot (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \end{matrix}$$

Пример.

Вычислить скалярное и векторное произведения векторов a(1, 2, 3) и b(4, 5, 6).

Решение.

$(a, b) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$
$[a \cdot b] = e_1(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - e_2(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + e_3(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -3i + 6j - 3k.$

ЗАДАНИЕ

1. Вычислить скалярное и векторное произведения векторов a (1, 3, 5) и b (2, 4, 6).
2. Вычислить скалярное и векторное произведения векторов c (-1, 2, 4) и d (-2, 3, 5).

7.3. Матрицы и определители

Таблица чисел $a_{i\,j}$ вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{i\,j}), \qquad (7.6)$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется ***матрицей размером*** *m x n*.

Числа a_{ij} называются ее ***элементами***. При m = n она называется ***квадратной матрицей*** *n**-го порядка***.

Если представить, что строки матрицы являются n-мерными векторами $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in})$, то максимальное число линейно независимых векторов называется ***рангом*** матрицы A.

Операции над матрицами

1. При умножении матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ получаем матрицу $B = (b_{ij})$, т.е. $\lambda A = B$, элементы которой равны $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Пример.

Пусть: $\lambda = 2$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда:

$$\lambda \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. При сложении матриц $A = (a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ получаем матрицу $C = (c_{ij})$, т.е. $A + B = C$, элементы которой равны $c_{ij} = = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример.

Пусть: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Тогда:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

3. При умножении двух матриц A на матрицу B получаем матрицу $C = (c_{ij})$, при этом число столбцов A должно быть равно числу строк матрицы B. Каждый элемент $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Пример.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Каждой квадратной матрице A можно сопоставить число |A|, которое вычисляется по определенному правилу. Это число называется определителем |A|.

Например, определитель второго порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (7.7)$$

7.4. Системы линейных уравнений

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (7.8)$$

где x_i – неизвестные; a_{ij} – коэффициенты системы; b_i – свободные члены.

Система чисел ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) называется ***решением системы уравнений*** (7.8), если эти числа при подстановке в систему (7.8) превращают его в тождество.

Если система (7.8):

а) не имеет ни одного решения, то она называется ***несовместной***;

б) имеет решение – ***совместной***;

в) если совместная система имеет бесконечное множество решений, то она называется ***неопределенной;***

г) если совместная система имеет единственное решение, то она называется ***определенной***.

Пусть векторы a_j – столбцы матрицы A, т.е. эту матрицу можно представить в виде $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Введем определители: $|A| = |a_1, a_2, \ldots, a_n|$ и $|A_k| = |a_1, a_2, \ldots, b_k, a_n|$, т.е. столбец a_k заменяется на столбец свободных членов b_k.

Правило Крамера. Если определитель системы (7.8) отличен от нуля, т.е. $|A| \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение, вычисляемое по формуле

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|} \ (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (7.9)$$

Пример.

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2 \cdot x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}.$$

Решение

$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$; $|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 8 = 10$;

$|A_2| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20$.

Согласно правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{10}{10} = 1; \ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{20}{10} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

8. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Функции нескольких переменных

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Рассмотрим множество всевозможных упорядоченных совокупностей n чисел вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое называется n-мерным координатным пространством R^n. Каждая упорядоченная совокупность $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется точкой M этого пространства.

Между двумя точками этого пространства $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ можно определить ***расстояние*** *r(A, B)*:

$$r(A,B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \qquad (8.1)$$

Координатное пространство R^n с введенным расстоянием r(A, B) называется ***n-мерным евклидовым пространством E^n.***

Рассмотрим множество $E^n{}_1 \subset E^n$. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этого подмножества $E^n{}_1$ можно поставить некоторое действительное число u, то говорят, что на множестве $E^n{}_1$ определена ***функция n переменных*** $u = f(M)$ или $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – точка множества $E^n{}_1$, где определена функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим частное приращение этой функции в точке M, соответствующее приращению Δx_k аргумента x_k:

$$\Delta_k u = f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n).$$

Частной производной функции $u = f(x_1, ..., x_n)$ по аргументу $x_к$ в точке M называется

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k}(M). \qquad (8.2)$$

Рассмотрим полное приращение функции $u = f(x_1, ..., x_n)$ в точке M, принадлежащей области $E^n{}_1$:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, ..., x_n).$$

Функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x_1, ..., x_n)$, если ее полное приращение Δu можно представить в виде

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} (A_k \cdot \Delta x_k + a_к \cdot \Delta x_k), \qquad (8.3)$$

где $A_к$ – некоторые числа; $a_к$ – бесконечно малые при $\Delta x_k \to 0$ для всех k от 1 до n (т.е., $\alpha_к \to 0$ при $\Delta x_к \to 0$).

Дифференциалом функции $u = f(x_1, ..., x_n)$ в точке M называется линейная функция вида

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M) \cdot \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M) \cdot \Delta x_n. \qquad (8.4)$$

ТЕОРЕМЫ

1. ***Необходимое условие дифференцируемости***. Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке M, то она имеет в этой точке частные производные по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_n$.

2. ***Достаточное условие дифференцируемости***. Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет частные производные по каждому аргументу

$x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки M и эти частные производные непрерывны в точке M, то функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке M.

Геометрический смысл дифференцируемости функции. Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$, то в точке (x, y, $f(x_0, y_0)$) существует касательная плоскость к поверхности S (графику этой функции), причем уравнение этой касательной плоскости имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cdot(y-y_0)=u-f(x_0,y_0). \tag{8.5}$$

Пример.

Найти частные производные и дифференциал функции

$$u = y\cdot x^2 + y + x^3$$

в точке M(1, 2).

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = 2yx + 3x^2\Big|(1,2) = 4 + 3 = 7;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = x^2 + 1\Big|(1,2) = 1 + 1 = 2.$$

Дифференциал в точке M(1,2) равен:

$$du(1, 2) = 7\cdot dx + 2\cdot dy.$$

ЗАДАНИЕ

Найти частные производные и дифференциал du в точке M(2, 1):

1. $u = x^2\cdot y^3+x^3$;
2. $u = y^3/x + y^2 + xy^2$;
3. $u = \sin(x^2 + y^3)$;
4. $u = x/(x+y^2)$;
5. $u = x^y$.

8.2. Локальный экстремум функции

Функция u = f(M) имеет в точке M_0 локальный максимум, если существует такая окрестность точки M_0, в которой выполняется неравенство

$$f(M) < f(M_0) \text{ для всех } M \neq M_0. \tag{8.6}$$

Функция u = f(M) имеет в точке M_0 ***локальный минимум***, если существует такая окрестность точки M_0, в которой выполняется неравенство

$$f(M) > f(M_0) \text{ для всех } M \neq M_0. \qquad (8.7)$$

Если функция u = f(M) имеет в точке M_0 локальный максимум или локальный минимум, то говорят, что эта функция имеет в точке M_0 ***локальный экстремум***.

ТЕОРЕМА

Необходимое условие экстремума

Если функция u = f(M) имеет в точке M_0 локальный экстремум и в этой точке существует частная производная функции по какому-либо аргументу $X_к$, то $\partial u / \partial x_к (M_o) = 0$.

Следствие. Если функция u = f(M) имеет в точке M_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то дифференциал функции в точке M_0 равен нулю, т.е.

$$du(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)\, dx_n = 0. \qquad (8.8)$$

Рассмотрим достаточное условие экстремума функции на примере функции двух переменных.

ТЕОРЕМА

Достаточное условие экстремума

Пусть функция u = f(x, y) дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и дважды дифференцируема в самой точке M_0. Пусть M_0 – точка возможного экстремума данной функции, т.е. дифференциал функции в этой точке равен нулю: $du(M_0) = 0$.

Введем обозначения:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0);$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0); \qquad (8.9)$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0).$$

Обозначим: $D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$.

Тогда:

1. Если $D > 0$, то в точке M_0 функция $u = f(x, y)$ имеет локальный экстремум:

– максимум при $a_{11} < O$;

– минимум при $a_{11} > O$.

2. Если $D < 0$, то в точке M_0 функция $u = f(x, y)$ не имеет экстремума.

3. Если же $D = 0$, то в точке M_0 функция $u = f(x, y)$ может иметь локальный экстремум, а может и не иметь его. Требуются дополнительные исследования функции в этой точке.

***Пример*.**

Найти точки локального экстремума функции $u = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y$.

Решение.

Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$u'_x = 2x - 2y = 0; \qquad u'_y = -2x + 2 = 0.$$

Решая эту систему, получаем точку возможного экстремума: M(1,1).
Далее находим частные производные второго порядка:

$$u''_{xx} = 2; \; u''_{xy} = -2; \; u''_{yy} = 0.$$

Тогда $D = u''_{xx} \cdot u''_{yy} - (u''_{xy})^2 = -4 < 0$.
Следовательно, в точке M функция $u = f(x, y)$ не имеет локального экстремума.

ЗАДАНИЕ

Найти точки локального экстремума функций:

1. $u = x_2 - 2 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^3$;

2. $u = x^2 - x \cdot y + y^2$;

3. $u = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x$;

4. $u = x^2 - x \cdot y - y^2$.

8.3. Условный экстремум. Метод Лагранжа

Рассмотрим функцию $u = f(x, y)$, определенную и непрерывно дифференцируемую на множестве $E^2{}_1 \subset E^2$.

Обозначим X – множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям

$$g_i(x, y) = 0 \ (i = 1,..., m). \tag{8.10}$$

Уравнения (8.10) называются ***уравнениями связи***.

Точка $M_0 \in X$ называется ***точкой условного максимума функции*** *u = f(x, y),* если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки M из этой окрестности выполняется

$$f(M) < f(M_0),\ M \neq M_0. \tag{8.11}$$

Точка $M_0 \in X$ называется ***точкой условного минимума функции*** *u = f(x,y)*, если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки M из этой окрестности выполняется

$$f(M) > f(M_0),\ M \neq M_0. \tag{8.12}$$

Задача об условном экстремуме функции u = f(x, y) при условиях связи (8.10) эквивалентна задаче о локальном экстремуме ***функции Лагранжа***:

$$L(x, y) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(x, y), \tag{8.13}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ – некоторые постоянные (коэффициенты Лагранжа).

Метод Лагранжа состоит из следующих этапов:

1. Составляется функция Лагранжа:

$$L(x, y) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(x, y). \tag{8.14}$$

2. Вычисляются и приравниваются нулю ее частные производные по x, y и добавляется уравнение связи:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^{m} \ddot{e}_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x} = 0; \tag{8.15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{i=1}^{m} \ddot{e}_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial y} = 0, \quad g_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

3. Решается система (2 + m) уравнений (8.15) относительно неизвестных $x, y, \lambda_1, ..., \lambda_m$.

Полученная система уравнений – необходимые условия первого порядка в задаче на относительный экстремум, а ее решения x_0, y_0 называются ***условно-стационарными точками***.

Как и в случае задач на безусловный экстремум, необходимые условия первого порядка не определяют характера условно-стационарных точек. Для выяснения этого вопроса следует привлечь производные функций f(M), $g_i(M)$ более высоких порядков.

Требуется вычислить второй дифференциал $d^2L(x,y)$ в условно-стационарной точке (x_0, y_0): $d^2L(x_0,y_0) = L''_{xx} \cdot dx^2 + 2L''_{xy}dx\,dy + L''_{yy}dy^2$.

Если $d^2L(x_0,y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) – условный минимум функции $f(x,y)$.

Если $d^2L(x_0,y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) – условный максимум $f(x,y)$.

Если же $d^2L(x_0,y_0)$ – знакопеременная квадратичная форма, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x,y)$ не имеет условного экстремума.

Пример.

Найти точки условного экстремума функции $z = x^2 + y^2$, если $x + y = 1$.

Решение.

$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot (x + y - 1)$;

$F'_x = 2x + \lambda = 0$;
$F'_y = 2y + \lambda = 0$;
$x + y -1 = 0$.

Решением этой системы являются точки $x = 1/2$; $y = 1/2$; $\lambda = -1$.
Определим: $L''_{xx} = 2$; $L''_{xy} = 0$; $L''_{yy} = 2$;
Определим второй дифференциал: $d^2F(1/2, 1/2) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$.
Следовательно, в точке $x = 1/2$, $y = 1/2$ функция $z = x^2 + y^2$ достигает своего условного минимума: $z_{min} = (1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2$.

ЗАДАНИЕ

Найти точки условного экстремума:

1) $f(x, y) = x \cdot y$, если $x + y = 1$;
2) $f(x, y) = x^2 + y^2$, если $x - y = 1$;
3) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 1$; $y = 1$; $x + y = 1$;
4) из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, чья площадь наибольшая.

9. Краткие интегралы

9.1. Двойной интеграл и его приложения

Пусть функция $f(x,y)$ определена в ограниченной замкнутой области D плоскости x0y. Разобьем область произвольным образом на n элементарных областей, имеющих площади ΔS_1, ΔS_2, $\ldots \Delta S_n$ (рис. 20). Введем понятие диаметров этих областей d_1, d_2, … d_n, которыми называются наибольшие из расстояний между двумя точками границ этих областей.

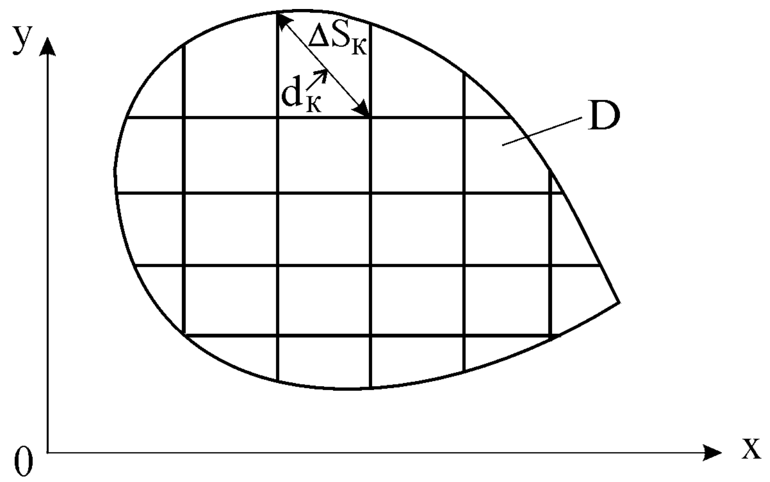


Рис. 20. Область D определения функции f (x, y)

Выберем в каждой элементарной области разбиения произвольную точку $P_k(x_k, y_k)$, ($k = 1, 2, \dots n$) и умножим значение функции в этих точках на площади соответствующих элементарных областей. В результате получаем выражение $f(x_1, y_1) \cdot \Delta S_1, \dots f(x_k,y_k) \cdot \Delta S_k, \dots f(x_n,y_n) \cdot \Delta S_n$.

Сложив эти выражения, получаем интегральную сумму для функции f (x, y) по области D:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k = f(x_1, y_1) \cdot \Delta S_1 + ... + f(x_n, y_n) \cdot \Delta S_n. \qquad (9.1)$$

Двойным интегралом от функции по области называется предел интегральной суммы при условии, что наибольший из диаметров элементарных областей стремится к нулю:

$$\iint_D f(x,y)dS = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k. \qquad (9.2)$$

В декартовых координатах двойной интеграл обычно записывают в виде:

$$\iint_D f(x,y)dxdy\,. \qquad (9.3)$$

Теорема существования двойного интеграла

Если функция f (x, y) непрерывна в замкнутой области D, то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения области D на элементарные и от выбора точек P_k внутри каждой такой области.

Геометрический смысл двойного интеграла

В трехмерном пространстве Oxyz выражение $z = f(x,y)$ определяет некоторую поверхность.

Тогда двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ равен ***объему цилиндрического тела,*** ограниченного сверху поверхностью z = f(x,y), сбоку - цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, а снизу - областью D плоскости Oxy (рис. 21).

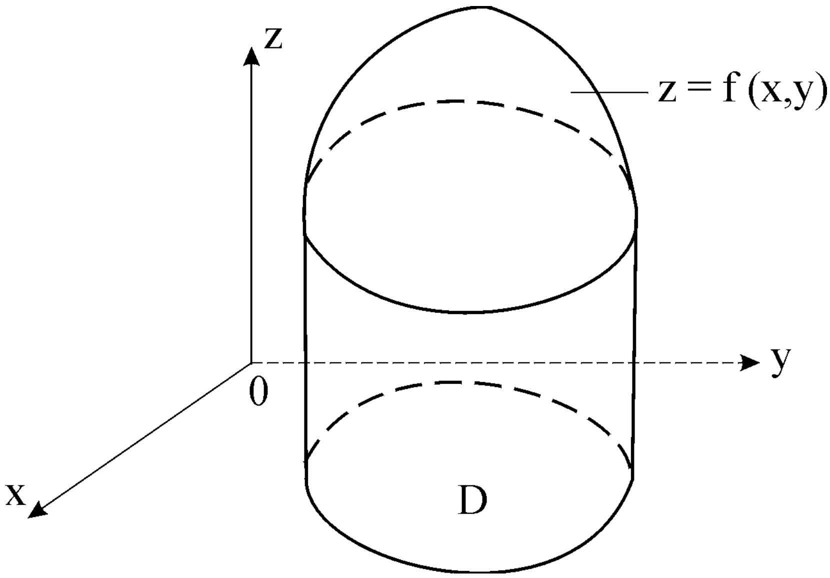


Рис. 21. Цилиндрическое тело объемом V = $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

Основные свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_D [f(x,y) \pm \varphi(x,y)]dS = \iint\limits_D f(x,y) \pm \iint\limits_D \varphi(x,y)dS$.

2. $\iint\limits_D C \cdot f(x,y)dS = C \cdot \iint\limits_D f(x,y)dS$, где C - постоянная.

3. Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y) + \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS.$$

Правила вычисления двойных интегралов

1. Пусть область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми x= a и x = b, а снизу и сверху - непрерывными кривыми y = φ (x) и y = ψ (x), каждая из которых пересекаются любой вертикальной прямой x = h только в одной точке (рис. 22). Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\varnothing(x)} f(x,y)dy. \qquad (9.4)$$

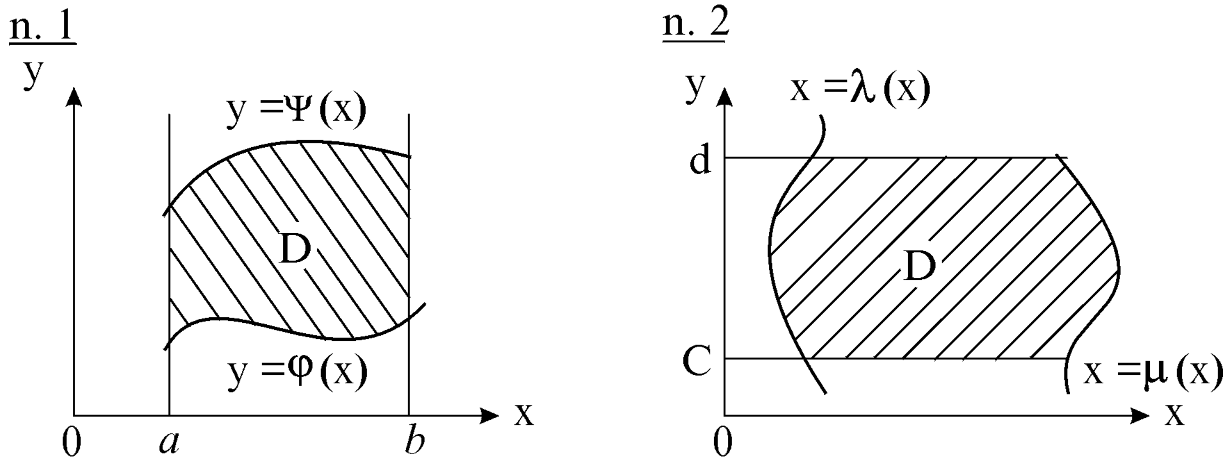


Рис. 22. Области интегрирования для 1-го и 2-го случаев

2. Пусть область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми y = c и y = d, а слева и справа - непрерывными кривыми x = λ (y) и μ (y), каждая из которых пересекается горизонтальной прямой y = k только в одной точке (см. рис. 22).

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\lambda(y)}^{\mu(y)} f(x,y)dx\,. \tag{9.5}$$

ПРИМЕРЫ

***Задача** 1.*

Вычислить двойной интеграл $Y = \iint\limits_{D}(x+y)dxdy$, если D - область, ограниченная кривыми $y = x^2$ и y = x.

Решение.

Область D изображена на рис. 23.

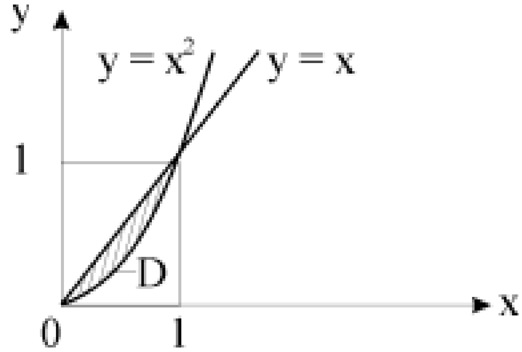


Рис. 23. Область D в системе координат Oxy

Тогда

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)dy =$$

$$= \int_0^1 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{x^2}^{x} \cdot dx = \int_0^1 \left[\left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right) - \left(x \cdot x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\right]dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{2 \cdot 5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}.$$

***Задача** 2.*

Вычислить двойной интеграл $Y = \iint_D (x^2 - y)dxdy$ по области D, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение.

Область интегрирования D имеет вид (рис. 24).

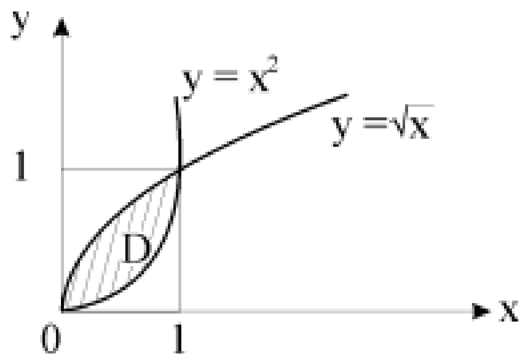


Рис. 24. Область D

Тогда

$$Y = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 - y)dy = \int_0^1 (x^2 y - \frac{y^2}{2})\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(x^2\sqrt{x} - \frac{x}{2}) - (x^4 - \frac{x^4}{2})\right]dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2\sqrt{x} - \frac{x}{2} - \frac{x^4}{4})dx = (\frac{x^{7/2} \cdot 2}{7} - \frac{x^2}{2 \cdot 2} - \frac{x^5}{5 \cdot 4})\Big|_0^1 = \frac{1}{70}.$$

***Задание** 1.*

Вычислить $Y = \iint_D (x \cdot y)dxdy$, если область D ограничена кривыми $y = 2x$ и $y = x^2$.

***Задание** 2.*

Вычислить $Y = \iint\limits_{D}(x-y)dxdy$, если область D ограничена кривыми $y = 3x^2$, $y = 6 - 3x$.

ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

*1. **Вычисление площади плоской фигуры.***

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D, находится по формуле

$$S = \iint\limits_{D} dxdy\,. \tag{9.6}$$

Если область D имеет вид, представленный на рис. 22, п.1, то

$$S = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{ø(x)} dy\,. \tag{9.7}$$

Если область D имеет вид, представленный на рис. 22, п.2, то

$$S = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{ë(y)}^{ì(y)} dx\,. \tag{9.8}$$

Если же область D в полярных координатах определена неравенствами $\alpha \le \theta \le \beta$, $\varphi(\theta) \le \rho \le f(\theta)$ (рис. 25), то

$$S = \iint\limits_{D} \rho d\rho d\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\theta \int\limits_{\varphi(\theta)}^{f(\theta)} \rho d\rho\,. \tag{9.9}$$

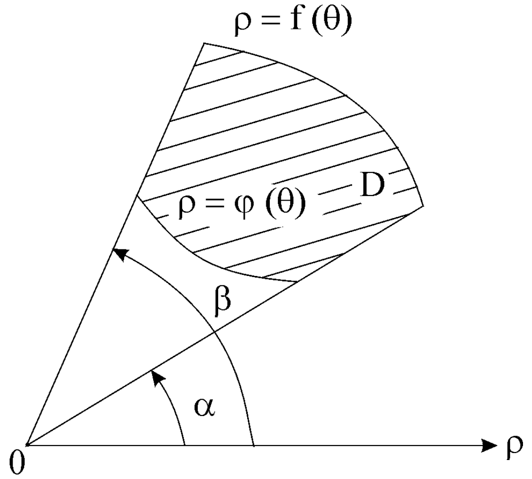


Рис. 25. Область D в полярных координатах

2. ***Вычисление объема тела***.

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью z = f(x,y), сбоку прямой цилиндрической поверхностью, проходящей по границе области D, а снизу плоскостью z = 0 (см. рис.21), вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy \tag{9.10}$$

ПРИМЕРЫ

Задача *1.*

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y = 2-x; $y^2 = 4x+4$.

Решение.

Плоская фигура D представлена на рис. 26.

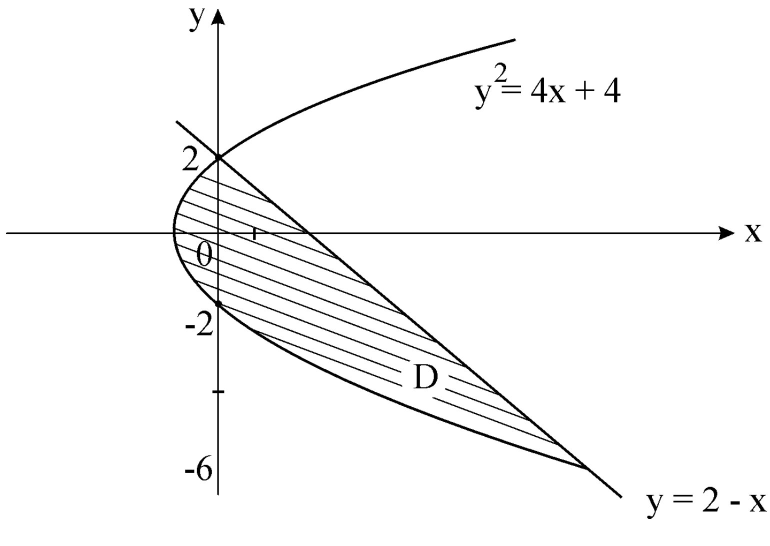


Рис. 26. Плоская фигура D

$$S = \int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx = \int_{-6}^{2} [(2-y) - \frac{y^2-4}{4})]\ dy =$$

$$= (3y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12})\Big|_{-6}^{2} = \frac{64}{3}\ \text{кв.ед.}$$

Задача 2.

Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями z = 1 - x - y; z = 0 и отрезками прямых y = 1 - x; x = 0; y = 0.

Решение.

Трехмерное тело представлено на рис. 27.

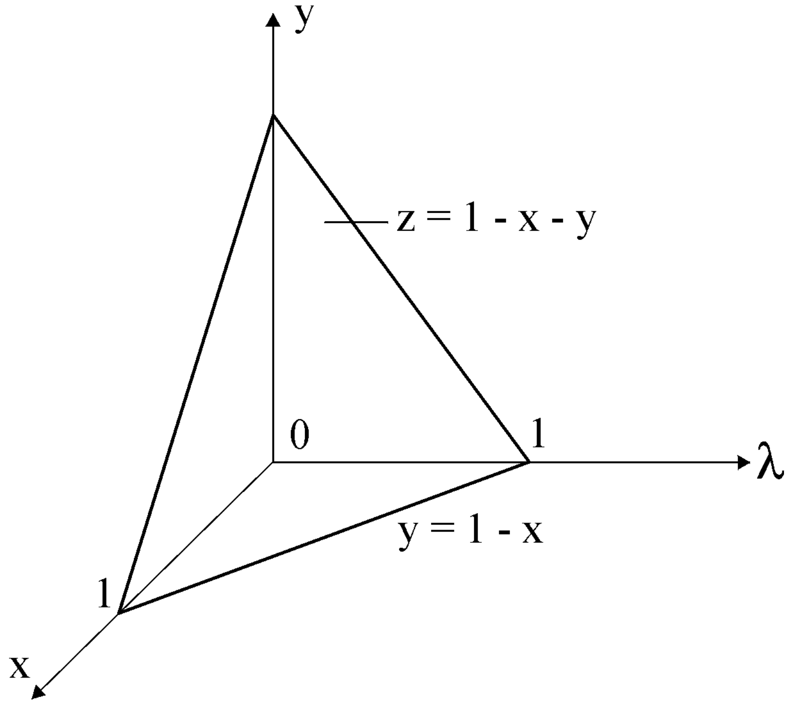


Рис. 27. Трехмерное тело объемом V

Тогда

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)dy = \int_0^1 [y - xy - \frac{y^2}{2}]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 [(1 - x) - x(1 - x) - \frac{(1 - x)^2}{2}]\, dx =$$

$$= (\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})\Big|_0^1 = \frac{1}{6} \text{ куб.ед.}$$

Задание 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$; y = x; y = 0.

Ответ: $S = \frac{\pi}{4}$ кв.ед.

***Задание** 2.*

Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 1$; $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\theta$ (вне окружности $\rho = 1$).

Ответ: $S = \frac{1}{18}(3\sqrt{3} - \pi)$ (кв.ед.).

***Задание** 3.*

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$; $2x + y = 4$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Ответ: $V = \frac{40}{3}$ куб.ед.

***Задание** 4.*

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 + x + y$; $y^2 = x$; $x = 1$; $y = 0$; $z = 0$.

Ответ: $V = \frac{79}{60}$ куб.ед.

***Задание** 5.*

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x \cdot y$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$.
Ответ: $V = 4$ куб.ед.

9.2. Тройной интеграл и его приложения

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в ограниченной замкнутой области T. Разобьем область T произвольным образом на n элементарных областей с объемами ΔV_1, ΔV_2, ... ΔV_n. Пусть d_1, d_2, ... d_n - максимальные линейные размеры каждой из областей, которые называются их диаметрами.

Внутри каждой из областей произвольным образом выберем точку $P_к(x_к,y_к,z_к)$ (к = 1, 2 ... n) и умножаем значение функции $f(x,y,z)$ в этой точке на соответствующий объем $\Delta V_к$ (к = 1, 2 … п) элементарной области (рис. 28).

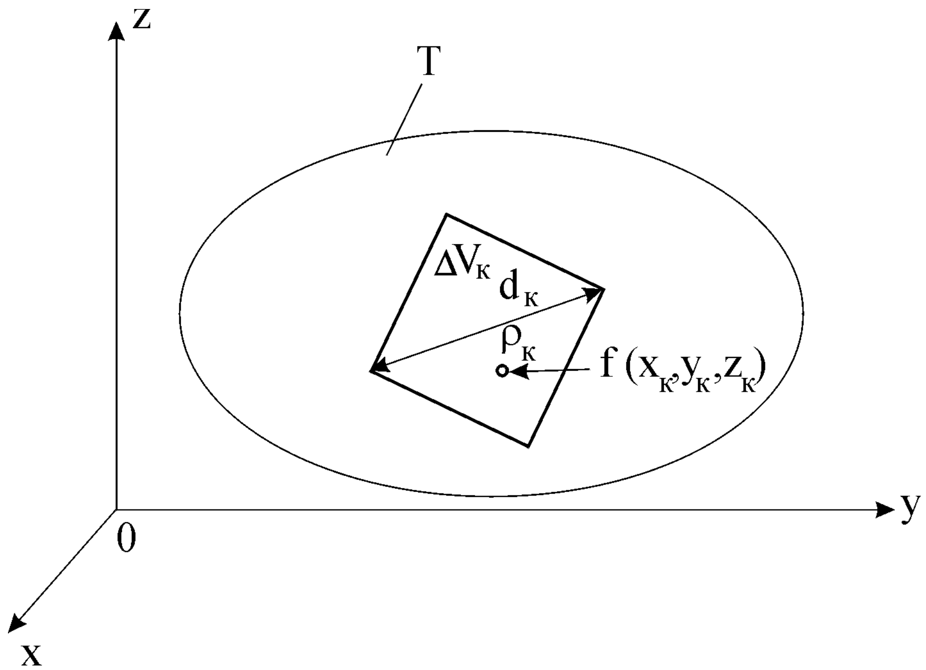


Рис. 28. Разбиение области Т

В результате сложения получаем интегральную сумму для функции f(x,y,z) по области Т:

$$\sum_{к=1}^{n} f(x_к, y_к, z_к)\Delta V_к. \qquad (9.11)$$

Тройным интегралом от функции f(x,y,z) по области Т называется предел интегральной суммы при стремлении наибольшего из диаметров элементарных областей к нулю:

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{к=1}^{n} f(x_к, y_к, z_к) \cdot \Delta V_к. \qquad (9.12)$$

В декартовых координатах тройной интеграл обычно записывают в виде

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz. \qquad (9.13)$$

Теорема существования тройного интеграла

Если функция f(x,y,z) непрерывна в замкнутой области Т, то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения области Т и от выбора точек $P_к$.

Физический смысл тройного интеграла.

Тройной интеграл $\iiint_T \rho(x,y,z)dxdydz$ представляет собой массу тела, занимающего область Т и имеющего переменную плотность $\rho = \rho(x, y, z)$.

Пусть область интегрирования T определяется неравенствами $a \le x \le b$; $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$; $\lambda(x, y) \le z \le \mu(x,y)$, где $\varphi(x)$, $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ - непрерывные функции (рис. 29).

Тройной интеграл от функции f(x,y,z) по области T вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{\lambda(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (9.14)$$

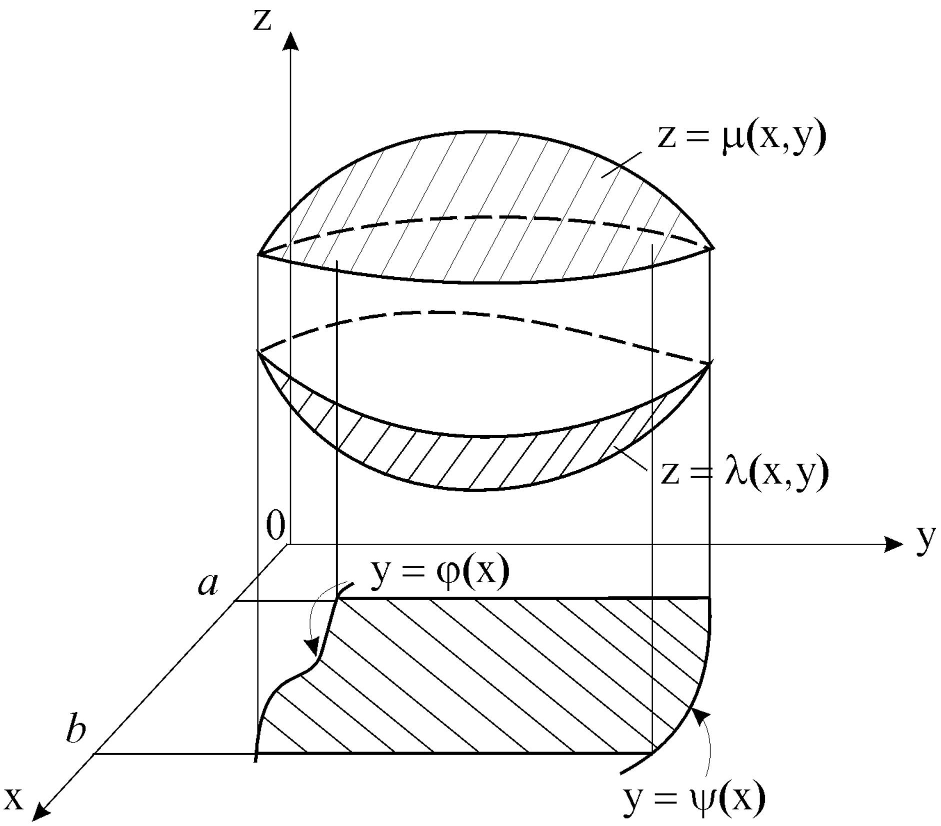


Рис. 29. Область T интегрирования функции f(x,y,z)

ПРИМЕРЫ

***Задача** 1.*

Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями: $x + y + z = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Материал тела имеет переменную плотность $\rho = \rho_0 \cdot z$.

Решение.

Тело имеет вид (рис. 30).

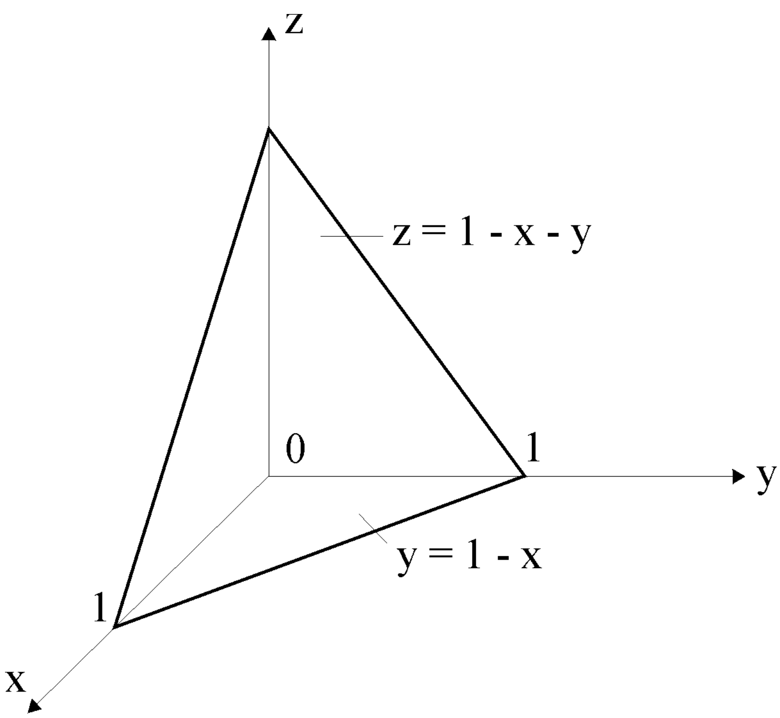


Рис. 30. Трехмерное тело с плотностью $\rho = \rho_0 \cdot z$

$$M = \int_0^1 dx \int_0^{1\text{-}x} dy \int_0^{1\text{-}x\text{-}y} \rho_0 z dz = \frac{\rho_0}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1\text{-}x} z^2 \Big|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{\rho_0}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1\text{-}x} (1 - x - y)^2 dy = \frac{\rho_0}{2}\int_0^1 [(1 - x)^2 y - \frac{2(1-x)y^2}{2} + \frac{y^3}{3}]_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{\rho_0}{2}\int_0^1 (1 - x)^3 dx = -\frac{\rho_0}{6 \cdot 4}(1-x)^4 \Big|_0^1 = \frac{\rho_0}{24} \text{ ед.массы.}$$

***Задача** 1.*

Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = 1$. Материал тела имеет переменную плотность ρ_0.

Ответ: $M = \frac{\rho_0 \cdot \pi}{2}$.

***Задача** 1.*

Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями: $x + y = 1$; $z = x^2 + y^2$; $x = y = z = 0$. Плотность материала постоянная ρ_0.

Ответ: $M = \frac{ñ_0}{6}$.

РАЗДЕЛ 3

РЯДЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

10.1. Числовые ряды

Пусть $\{x_n\}$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad (10.1)$$

называется ***числовым рядом***, а x_n – ***его n-ым членом***.

Число $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ называется ***n-ой частичной суммой*** ряда (10.1), а последовательность $\{S_n\}$ – последовательностью частичных сумм ряда (10.1).

Числовой ряд (10.1) называется ***сходящимся***, если сходится последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Предел S числовой последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ называется ***суммой ряда*** (10.1) и записывается

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S. \qquad (10.2)$$

Если последовательность расходится, то ряд (10.1) называется ***расходящимся***.

Необходимое условие сходимости числового ряда. Для сходимости числового ряда (9.2) необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Пример.

Рассмотрим гармонический ряд: $1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n + ... = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k$.

Очевидно, что $x_n = 1/n \to 0$. Тем не менее этот ряд является расходящимся.

Замечание *1*.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ с n-ым членом $x_n = 1/n^p$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

10.2. Признаки сходимости рядов со знакопостоянными членами

*1-**й признак сравнения***.

Рассмотрим ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$, где $0 \le x_k \le y_k$. Тогда если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$; если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$.

*2-**ой признак сравнения***.

Если для общих членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ выполняется $\lim\limits_{k\to\infty} x_k / y_k =$ $= L < \infty$ (т.е. L – конечное число), то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

ПРИМЕРЫ

1. Проверить сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k^2)$.

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Согласно замечанию 1 этот ряд сходится, т.к. для него p = 2.

Далее $1/к^2 > 1/2k^2$.

Следовательно, по 1-му признаку сравнения и рассматриваемый ряд ***сходится***.

2. Проверить сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(3k+1)$.

Сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, который расходится.

Далее $\lim\limits_{k\to\infty} (1/k)/(l/(3k+l)) = 3$.

По 2-му признаку сравнения оба ряда ***расходятся*** одновременно.

Задачи. Проверить сходимость рядов:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} 3/\sqrt{(2k+1)}$; 2. $\sum_{k=1}^{\infty} k/(2k^2+6)$; 3. $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{(k^3-2)}$; 4. $\sum_{k=1}^{\infty} 2k/(k^3+k)$;

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (k^3-k)/(k-k^4+1)$; 6. $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k-2)\cdot(k^2+k)$; 7. $\sum_{k=1}^{\infty} 2/\sqrt{(k^3+k-4)}$;

8. $\sum_{k=1}^{\infty} (1-k)/\sqrt{(k^4-2)}$; 9. $\sum_{k=1}^{\infty} 2k/(k^2-\sqrt{k})$; 10. $\sum_{k=1}^{\infty} (3k+\sqrt{k})/(1-2k)$.

10.3. Признаки сходимости Даламбера, Коши и Лейбница

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ из модулей его членов – расходится.

Признак Даламбера.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+1}/x_n| = L$, то при $L < 1$ – ряд сходится абсолютно, а при $L > 1$ – расходится.

Признак Коши.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x_k|} = L$, то при $L < 1$ – ряд сходится абсолютно, а при $L > 1$ – расходится.

ПРИМЕРЫ

Проверить сходимость ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. По признаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/2^{n+1}}{1/2^n} = 1/2 < 1$, ряд сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n+1})^n$. По признаку Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}<1$, ряд сходится.

Признак сходимости знакочередующего ряда (признак Лейбница).

Для сходимости ***знакочередующего ряда*** $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}a_n - \ldots$ необходимо, чтобы:

1. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.
2. $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$ ($k = 1, 2, ...$).

Пример.

Ряд 1 – 1/2 + 1/3 – 1/4 + ... +(-1)n/n + ... – сходится, т.к. выполнены оба условия признака Лейбница.

ЗАДАНИЕ

Проверить сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n/3^n)$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[3n^2/(5n+8n^2)]^n$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+3}{n^3+1}\right]$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n+1}{n^2+3n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n+3}}$.

10.4. Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n . \quad (10.3)$$

называется ***степенным рядом***. Здесь a_0, ... a_n,... – последовательность вещественных чисел.

Формула Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (10.4)$$

определяет ***радиус сходимости*** степенного ряда.

Можно доказать теорему, что степенной ряд (10.3) абсолютно сходится на интервале (x_0-R, x_0+R) и расходится вне этого интервала (рис. 31). Интервал (x_0-R, x_0+R) называется ***интервалом сходимости*** степенного ряда (10.3).

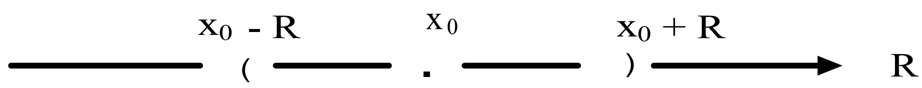


Рис. 31. Интервал сходимости

Радиус сходимости можно рассчитать и по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Пример.

Исследовать сходимость степенного ряда:

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$$

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1.$$

Таким образом, ряд сходится для значений x: $-1 < x < 1$ и расходится вне этого интервала.

При x = 1 получаем гармонический ряд: 1 + 1/2 + ... + 1/n + ..., который расходится.

При x = -1 получаем знакопеременный ряд: -1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 ..., который сходится. Итак, область сходимости степенного ряда - множество $-1 \le x < 1$.

ЗАДАНИЕ

Исследовать сходимость степенных рядов:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n/3^n)$; 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n/n^2)$;

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n(1+2/n)^n$; 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cdot 3^n}{n!}$.

11. Дифференциальные уравнения

11.1. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое связывает независимую переменную x, искомую функцию y = y(x) и ее производные y', y'', … $y^{(n)}$, т.е. уравнение вида

$$F(x,y,y',y'', \dots y^{(n)}) = 0. \qquad (11.1)$$

Если искомая функция y = y(x) есть функция одной переменной x, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, если же функция зависит от двух (x,t) или более переменных, то уравнение называется ***дифференциальным уравнением в частных производных*** вида

$$F(x,t,y, \frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dt}, \dots \frac{d^m y}{dx^к dt^n}). \qquad (11.2)$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, которая входит в уравнения (11.1) или (11.2).

Например, уравнение

$$y' + x^2 \cdot y = \cos x$$

является дифференциальным уравнением первого порядка.

Уравнение вида

$$y''' + y' = 0$$

является дифференциальным уравнением третьего порядка.

Решением дифференциального уравнения ***n-го порядка*** на интервале (a,b) называется такая функция y = φ(x), определенная на этом интервале вместе со своими производными n-го порядка включительно, которая при подстановке в уравнение (11.1) превращает его в тождество по x на интервале (a,b).

Например, функция $y = \sin x + x^2$ является решением уравнения $y'' + y = x^2 + 2$ на интервале $(-\infty, \infty)$. Действительно, дифференцируя это уравнение дважды, получаем:

$$y' = \cos x + 2x, \; y'' = \sin x + 2.$$

Тогда $y' + y = -\sin x + 2 + \sin x + x^2 = x^2 + 2$.

График решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой*** этого уравнения.

Рассмотрим ***общий вид уравнения первого порядка***:

$$F(x,y,y') = 0. \qquad (11.3)$$

Если уравнение (11.3) удается разрешить относительно y', то получаем

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (11.4)$$

уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.

Общим решением дифференциального уравнения (11.4) называется функция

$$y = \varphi(x,C), \qquad (10.5)$$

зависящая от переменной x и произвольной постоянной C, которая удовлетворяет уравнению (11.4) при любых значениях постоянной C. Таким образом, общему решению дифференциального уравнения первого порядка $y = \varphi(x,C)$ на плоскости $x0y$ соответствует семейство интегральных кривых, каждое из которых отвечает конкретному значению постоянной $C = C_0$ (рис. 32).

Всякое решение уравнения (11.4) вида $y = \varphi(x,C_0)$, получаемое из общего решения $y = \varphi(x,C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется ***частным решением***.

Например, общим решением уравнения $y' - y = 0$ является функция $y = C \cdot e^x$.

Частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$, получаем подстановкой в общее решение значения $x = 1$. Тогда получаем соотношение: $-1 = C \cdot e$, откуда $C = -e^{-1}$. В результате частное решение имеет вид: $y = -e^{x-1}$.

Задача Коши.

Задачей Коши называют задачу нахождения частного решения $y = y(x)$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad (11.6)$$

удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрически это означает, что среди всех интегральных кривых ищется такая интегральная кривая, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0)$ плоскости $x0y$ (см. рис. 32).

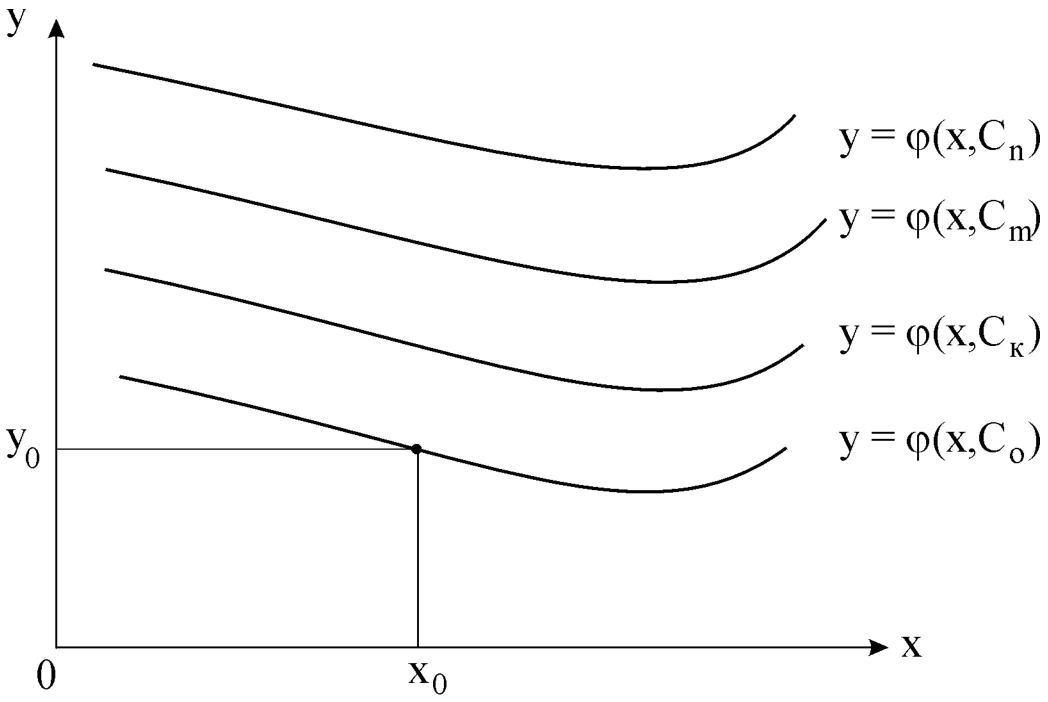


Рис. 32. Семейство интегральных кривых y = φ(x,C)

Однако встречаются дифференциальные уравнения, имеющие такие решения, которые не получаются из общего решения ни при каких значениях C. Такие решения называются ***особыми***.

Например, уравнение $y' = -\sqrt{1-y^2}$ имеет общее решение $y = \cos(x+C)$. В то же время функция $y = 1$ также является решением этого дифференциального уравнения, но это решение не может быть получено из общего решения ни при каком значении C, т.е. является особым.

11.2. Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$f(x) \cdot \varphi(y)\, dx = \psi(x) \cdot u(y)\, dy, \tag{11.7}$$

в котором функции при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называется ***уравнением с разделяющимися переменными.***

Путем деления на произведение $\varphi(y) \cdot \psi(x)$ это уравнение приводится к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{f(x)}{\varnothing(x)}dx = \frac{u(y)}{\varphi(y)}dy. \tag{11.8}$$

Общее решение уравнения (11.8) в неявной форме, называемое ***общим интегралом***, имеет вид:

$$\int\frac{f(x)}{\varnothing(x)}dx - \int\frac{u(y)}{\varphi(y)}dy = C. \tag{11.9}$$

Замечание.

Деление на $\varphi(y) \cdot \psi(x)$ может привести к потере частных решений, обращающих в ноль произведение $\varphi(y) \cdot \psi(x)$.

***Задача** 1*.

Решить уравнение: $xydx + (x + 1)\,dy = 0$.

Решение.

Запишем общий интеграл этого уравнения: $\int \frac{x}{x+1}dx = -\int \frac{dy}{y} + C$.

Вычисляем интегралы: $x - \ln|x + 1| = -\ln|y| + \ln C$.

Откуда $x = \ln\left(\left|\frac{x+1}{y}\right| \cdot C\right)$.

Тогда $\ell^{x} = C \cdot \frac{(x+1)}{y}$.

Решение: $y = C \cdot (x + 1) \cdot \ell^{-x}$.

Задача** 2 **(задача о распаде радия).

Скорость распада радия пропорциональна его количеству. Найти закон распада, если период полураспада T = 1600 лет.
Решение.
Пусть $P = P(t)$ - текущее количество радия.

Согласно условию задачи скорость распада радия $\frac{dP}{dt}$ пропорциональна его количеству P, т.е. $\frac{dP}{dt} = -к \cdot P$, где к - коэффициент пропорциональности.
Проинтегрируем уравнение с разделяющимися переменными: $\int \frac{dP}{P} = -к \cdot \int dt + C$; $\ln P = -к \cdot t + \ln C_1$.
В результате получаем $P = C_1 \cdot \ell^{-кt}$.
При $t = 0$, $P = P_0$ - начальное количество радия.
Тогда $P_0 = C_1$.
Найдем из условия о величине полупериода распада $T_0 = 1600$ лет.

$$\frac{P_0}{2} = P_0 \cdot \ell^{-к \cdot T_0}.$$

Тогда $\frac{1}{2} = \ell^{-к \cdot T_0}$; $\ln\frac{1}{2} = -к \cdot T_0$, $к = \frac{\ln 2}{T_0}$.

В результате получаем закон распада радия в зависимости от количества лет t наблюдения за этим процессом: $P = P_0 \cdot \ell^{-\frac{\ln 2}{T_0}\cdot t}$.

Задача 3.

Тело массой m двигается в среде с начальной скоростью V_0, проходит расстояние и заканчивает движение в этой среде с конечной скоростью $V_к$. Движение в среде происходит с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости движения (рис. 33).
Найти время движения в среде $t_{дв.}$.

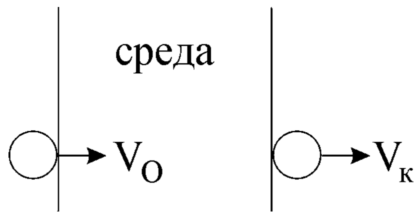


Рис. 33. Движение тела в среде с сопротивлением

Решение.

Составим уравнение с разделяющимися переменными, удовлетворяющее постановке задачи: $m\frac{dV}{dt} = -к \cdot V^2$.

В результате интегрирования получаем $\int \frac{dV}{V^2} = -\frac{к}{m}\int dt + C$;

$-\frac{1}{V} = -\frac{к}{m}t + C$.

При t = 0: $-\frac{1}{V_0} = C$.

При подстановке значения C в исходное уравнение получаем $-\frac{1}{V} = -\frac{к}{m}t - \frac{1}{V_0}$ или $\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} = \frac{к}{m}\cdot t$.

Тогда закон движения имеет вид: $t = \frac{m}{к}\cdot(\frac{V_0 - V}{V \cdot V_0})$.

В итоге при $V = V_k$ находим время движения: $t_{дв.} = \frac{m}{к}\cdot(\frac{V_0 - V_к}{V_к \cdot V_0})$.

Задание:

1) $\frac{dy}{dx} = 2xy$; 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{1+y}$; 3) $\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$;

4) Найти частное решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 3$.

11.3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Дифференцированное уравнение вида

$$y' + P(x) \cdot y = 0 \tag{11.10}$$

называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением***.

Решение уравнения (11.10) легко получить разделением переменных:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx;\quad \int\frac{dy}{y} = -\int P(x)dx;\ \ln y = -\int P(x)dx + \ln C.$$

В результате получаем общее решение уравнения (11.10)

$$y = C \cdot \ell^{-\int P(x)dx},$$

где C - произвольная постоянная.

Уравнение вида

$$y' = P(x) \cdot y = Q(x) \tag{11.11}$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением. Общее решение уравнения (11.11) можно найти, используя ***метод Лагранжа***.

Согласно этому методу общее решение неоднородного уравнения (11.11) ищем в виде:

$$y = C(x) \cdot \ell^{-\int P(x)dx}. \tag{11.12}$$

Для нахождения C(x) нужно подставить выражение (11.12) в исходное уравнение (11.11).

В результате получаем $C'(x)\cdot \ell^{-\int P(x)dx} - C(x)\cdot P(x) \cdot \ell^{-\int P(x)dx} + C(x) \cdot \ell^{-\int P(x)dx} \cdot P(x) = Q(x)$.

Отсюда $C'(x) = Q(x) \cdot \ell^{-\int P(x)dx}$; $C(x) = \int Q(x) \cdot \ell^{-\int P(x)dx}\, dx + C_1$, где C_1 - произвольная постоянная.

Тогда искомое общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y' = [\int Q(x)\cdot \ell^{\int P(x)dx}dx + C_1]\cdot \ell^{-\int P(x)dx}. \qquad (11.13)$$

Уравнение вида

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^m, \qquad (11.14)$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$, называется ***уравнением Бернулли.***

Это уравнение можно преобразовать в линейное дифференциальное уравнение, производя замену неизвестной функции при помощи подстановки $z = y^{1-m}$. В результате уравнение Бернулли преобразуется к линейному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{1}{1-m}z' + P(x)\cdot z = Q(x). \qquad (11.15)$$

Решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения (11.15) можно осуществить, используя метод Лагранжа.

Задача *1.*

Найти решение: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3x$.

Решение.

Рассмотрим однородное линейное уравнение $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

Проинтегрируем это уравнение: $\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} + \ln C$; $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$.

Его решение: $y = \frac{C}{x}$.

Используем метод Лагранжа, выбрав общее решение исходного решения в виде $y = \frac{C(x)}{x}$.

Подставим это выражение в исходное уравнение $\frac{C'(x)\cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{C(x)}{x} = 3x$.

В итоге находим: $C'(x) = 3x^2$; $C(x) = x^3 + C_1$.

Общее решение исходного уравнения: $y = \frac{x^3 + C_1}{x}$.

Задание.

Решить уравнения:

1) $y' + 2y = \ell^{-x}$

Ответ: $y = C\cdot \ell^{-2x} + \ell^{-x}$.

2) $y' + 2xy = \ell^{-x^2}$

Ответ: $y = (C + x) \cdot \ell^{-x^2}$.

3) Решить задачу Коши:

$y' + y \cdot \cos x = \cos x$

Начальные условия $y(0) = 1$.

Ответ: $y = 1$.

4) $xy' - y = x^2 \cos x$

Ответ: $y = x (\sin x + C)$.

5) Между силой тока i и электродвижущей силой E в электрической цепи с сопротивлением R и самоиндукцией L существует следующая зависимость:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{E}{L},$$

где E, R и L - постоянные.

Найти силу тока $i = i(t)$, если в начальный момент времени $t = 0$ имеем

$i(0) = I$.

Ответ: $i(t) = \frac{E}{R} + C\ell^{-\frac{R}{L} \cdot t}$.

11.4. Дифференциальные уравнения n-го порядка

Дифференциальным уравнением *n-го* ***порядка*** называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (11.16)$$

Решением такого уравнения является n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество, т.е.

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)] = 0. \qquad (11.17)$$

Задача Коши для этого уравнения состоит в том, чтобы найти такое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (11.16), которое удовлетворяет условиям: $\varphi(x_0) = y_0$; $\varphi'(x_0) = y_1$, …, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Здесь $y_0, y_1, y_0, \ldots, y_{n-1}$ - заданные числа.

Функция $y = (x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ называется ***общим решением*** уравнения (11.16), если при соответствующем выборе постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ эта функция является решением любой задачи Коши.

Всякое решение уравнения (11.16), полученное при конкретных значениях постоянных C_1, C_2, ..., C_n, называется ***частным решением*** дифференциального уравнения (11.16).

Рассмотрим интегрирование некоторых дифференциальных уравнений n-го порядка.

1. ***Уравнение вида***

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (11.18)$$

Решение этого уравнения находится п-кратным интегрированием, а именно

$$y^{(n)} = f(x);\ y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y = \underbrace{\int\ldots\int}_{n} f(x)\underbrace{dx\ldots dx}_{n} + C_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1} \cdot x + C_n.$$

Пример *1* .

Найти общее и частное решение уравнения $y'' = \ell^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение.

$$y' = \int \ell^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}\ell^{2x} + C_1.$$

Тогда общее решение: $y = \int \left(\frac{1}{2}\ell^{2x} + C_1\right) dx = \frac{1}{4}\ell^{2x} + C_1x + C_2$.

Удовлетворим начальным условиям: $y(0) = \frac{1}{4} + C_2 = 1$; $y'(0) = \frac{1}{2} + C_1 = 0$.

Откуда $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{3}{4}$.

Тогда частное решение: $y = \frac{1}{4}\ell^{2x} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

2. ***Дифференциальное уравнение вида***

$$F(x, y^{(к)}, y^{(к+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (11.19)$$

которое не содержит искомой функции.

Порядок такого уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных данного уравнения, т.е.

$$U = y^{(к)}.$$

В результате получаем уравнение

$$F(x, U, U', \ldots, U^{(n-к)}) = 0.$$

Пример *2* .

Решить уравнение

$$x \cdot y'' = y'.$$

Решение.

Примем $y' = U$.

Тогда уравнение примет вид: $x \cdot \frac{dU}{dx} = U$.

Решение этого уравнения: $U = C_1 \cdot x$.

Или: $\frac{dy}{dx} = C_1 x$.

Запишем это уравнение в виде $dy = C_1 \cdot x \cdot dx$.

Его решение: $y = C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$.

3. Дифференциальное уравнение вида

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{11.20}$$

которое не содержит независимой переменной. Для решения этого уравнения за новый аргумент принимают саму функцию y, а также вводят замену $y' = U$, тогда $y'' = U \cdot \frac{dU}{dy}$, $y''' = U \cdot [\frac{d^2U}{dy^2} \cdot U + (\frac{dU}{dy})^2]$ и т.д.

Пример *3*.

Решить уравнение $y \cdot y'' = (y')^2$.

Решение.

Примем $U = y'$. Тогда $y'' = U \cdot \frac{dU}{dy}$.

Исходное уравнение запишем в виде $y \cdot U \frac{dU}{dy} = U^2$.

Представим это уравнение в виде $\frac{dU}{U} = \frac{dy}{y}$.

Его решение: $U = C_1 y$.

Тогда $\frac{dy}{dx} = C_1 y$.

Запишем: $\frac{dy}{y} = C_1 dx$.

Его решение: $\ln y = C_1 \cdot x + \ln C_2$.

Окончательно: $y = C_2 \cdot \ell^{C_1 \cdot x}$.

Задание.

Решить уравнения n-го порядка:

1) $y'' = x \cdot \ell^{-x}$.

Ответ: $y = (x + 2) \cdot \ell^{-x} + C_1x + C_2$.

2) $y'' + (y')^2 = 0$.

Ответ: $y = C_1$, $C_2 + \ell^{y} = C_3x$.

3) $x \cdot y'' = y'$.

Ответ: $y = C_1x^2 + C_2$.

4) $y'' + y' + 2 = 0$

Начальные условия: $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

Ответ: $y = -2x$.

11.5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0, \qquad (11.21)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - некоторые действительные числа.

Для решения этого уравнения составляют ***характеристическое уравнение***

$$к_n + a_1 \cdot к^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot к + a_n = 0. \qquad (11.22)$$

Это уравнение (11.22) является уравнением n-ой степени и имеет n корней: они могут быть простыми, кратными и комплексными. Тогда общее решение дифференциального уравнения (11.22) строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения (11.22):

1) каждому действительному простому корню к в общем решении соответствует слагаемое вида $C \cdot \ell^{кx}$;

2) каждому действительному корню к кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида $(C_1 + C_2 \cdot x \ldots C_m \cdot x^{m-1}) \cdot \ell^{кx}$;

3) каждой паре комплексных корней $к_1 = \alpha + i\beta$ и $к_2 = \alpha - i\beta$ в общем решении соответствует слагаемое вида $\ell^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x)$;

4) каждой паре комплексных сопряженных корней $к_1 = \alpha + i\beta$ и $к_2 = \alpha - i\beta$ кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида

$$\ell^{\alpha x} \cdot [(C_1 + C_2 \cdot x + \ldots + C_m \cdot x^{m-1})] \cdot \cos \beta x + (D_1 + D_2x + \ldots D_m \cdot \cdot x^{m-1}) \sin \beta x].$$

***Пример** 1.*

Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Решение.

Построим характеристическое уравнение: $к^2 - 7к + 6 = 0$.
Его корни: $к_1 = 6$, $к_2 = 1$.
Следовательно, общее решение исходного уравнения: $y = C_1 \cdot \ell^{6x} + C_2 \cdot \ell^{x}$.

***Пример** 2.*

Найти общее решение уравнения $y''' - 6y'' + 12y' - 8 = 0$.

Решение.

Построим характеристическое уравнение: $к^3 - 6к^2 + 12к - 8=(к - 2)^3= 0$.
Его корни: $к_1 = к_2 = к_3 = 2$, т.е. $к = 2$ - корень кратности 3.
Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y=(C_1 + C_2 \cdot x + + C_3 \cdot x^2) \cdot \ell^{2x}.$$

***Пример** 3.*

Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y' = 0$.

Решение.

Построим характеристическое уравнение: $к'' - 4к + 13 = 0$.
Его корни: $к_1 = 2 + 3i$, $к_2 = 2 + 3i$.
Следовательно, общее решение исходного уравнения: $y = \ell^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x)$.

***Задание**.*

Найти общее решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + 5y' + 6y = 0$.
   Ответ: $y = C_1 \cdot \ell^{-3x} + C_2\, \ell^{-2x}$;
2) $y'' - 2y +10y = 0$.
   Ответ: $y = C_1 \ell^{x} \cdot (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x)$;
3) $y''' - 3y'' + 3y' - y= 0$.
   Ответ: $y = \ell^{x} \cdot (C_1 + C_2x + C_3x^2)$;

4) $x''' + 2x'' - 3x' = 0$.

Ответ: $x = C_1 + C_2\ell^{-t} + C_3\,\ell^{3t}$;

5) $x''' - 8x = 0$.

Ответ: $x = C_1\ell^{2t} + \ell^{-t}(C_2\cos\sqrt{3}\,t + C_3\sin\sqrt{3}\,t)$.

11.6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным уравнением *n-го* ***порядка с постоянными коэффициентами*** называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} \cdot y' + a_n y = f(x), \qquad (11.23)$$

где a_1, a_2 ..., a_n - некоторые действительные числа.

Общее решение неоднородного уравнения (11.23) складывается из любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения вида (11.21): $y(x) = y_0(x) + U(x)$.

Если правая часть уравнения (11.23) имеет вид

$$f(x) = \ell^{\alpha x} \cdot [P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x], \qquad (11.24)$$

то для подбора частного решения этого уравнения применяют ***метод неопределенных коэффициентов.***

Согласно этому методу частное решение уравнения (11.23) следует искать в виде

$$U(x) = x^r \cdot \ell^{\alpha x} \cdot [P_\ell(x) \cdot \cos \beta x + Q_\ell(x) \cdot \sin \beta x]. \qquad (10.25)$$

Здесь r - показатель кратности корня $\alpha + i\beta$ в характеристическом уравнении $к^n + a_1 \cdot к^{n-1} + \ldots a_{n-1} \cdot к + a_n = 0$.

Если же характеристическое уравнение такого корня не имеет, то частное решение ищется в виде

$U(x) = \ell^{\alpha x} \cdot [P_\ell(x) \cdot \cos \beta x + Q_\ell(x) \cdot \sin \beta x]$, (11.26)

Многочлены $P_\ell(x)$ и $Q_\ell(x)$ с неопределенными коэффициентами имеют порядок, который равен наибольшему из порядков многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ исходной правой части (11.24) уравнения (11.23) и имеют вид:

$$\begin{aligned} P_\ell(x) &= A_0 \cdot x^\ell + A_1 \cdot x^{\ell-1} + \ldots A_\ell. \\ Q_\ell(x) &= B_0 \cdot x^\ell + B_1 \cdot x^{\ell-1} + \ldots B_\ell. \end{aligned} \qquad (11.27)$$

Для определения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, \ldots A_\ell$ и $B_0, B_1, \ldots, B_\ell$ частное решение $U = U(x)$ вида (11.26) или (11.27) подставляют в исходное уравнение (11.23). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений, в которых сравниваются $A_0, A_1, \ldots A_\ell$ коэффициенты, а также $B_0, B_1, \ldots B_\ell$ с коэффициентами при соответствующих степенях функции (11.24) в правой части уравнения (11.23).

Если же правая часть уравнения (11.23) равна сумме нескольких различных функций, то для отыскания частного решения такого уравнения надо найти частные решения относительно каждой функции, а затем согласно ***теореме наложения решений*** сложить эти частные решения. В результате получаем частное решение исходного дифференциального уравнения (11.23) со сложной правой частью.

***Пример** 1.*

Найти общее решение уравнения y'' + y' - 2y = ℓ^{3x}.

Решение.

Характеристическое уравнение $к^2 + к - 2 = (к - 1)(к + 2) = 0$ имеет корни $к_1 = 1$ и $к_2 = -2$.
Тогда общее решение однородного уравнения $y_0 = C_1\ell^{3x} + C_2\ell^{-2x}$.
Частное решение надо искать в виде: $U = A \cdot \ell^{3x}$.
Тогда $U' = 3A \cdot \ell^{3x}$, $U'' = 9A \cdot \ell^{3x}$.
Тогда $U'' + U' - 2U = A \cdot \ell^{3x}(9 + 3 - 2) = \ell^{3x}$.

Откуда $A = \dfrac{1}{10}$.

В результате общее решение неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + U = C_1\ell^{x} + C_2\ell^{-2x} + \frac{1}{10} \cdot \ell^{3x}.$$

***Пример** 2.*

Найти общее решение
$y' + 25y = \cos 5x$.

Решение.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 25y = 0.$$

Характеристическое уравнение: $к^2 + 25 = 0$.
Корни: $к_1 = 5i$, $к_2 = -5i$.
Общее решение однородного уравнения: $y_0 = C_1 \cdot \cos 5x + C_2 \cdot \sin 5x$.
Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $U = x(A \cdot \cdot \cos 5x + B \sin 5x)$.
Вычислим:

$$U' = (A \cdot \cos 5x + B \sin 5x) + 5x(-A \cdot \sin 5x + B \cos 5x);$$

$$U'' = 5(-A \cdot \sin 5x + B \cos 5x) + 5x(-A \sin 5x + B \cos 5x) + 25x(-A \cos 5x - B \sin 5x).$$

Тогда $U'' + 25U = -10A \sin 5x + 10B \cos 5x = \cos 5x$.

Тогда $A = 0$, $B = \dfrac{1}{10}$.

В итоге общее решение неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + U = C_1 \cdot \cos 5x + C_2 \sin 5x + \frac{1}{10} \cdot x \cdot \sin 5x.$$

***Пример** 3.*

Решить дифференциальное уравнение y'' + 3y' + 2y = 3x.

Решение.

Решим однородное уравнение y'' + 3y' + 2y = 0.
Характеристическое уравнение: $к^2 + 3к + 2 = 0$.
Имеет корни: $к_1 = -1$, $к_2 = -2$.
Поэтому общее решение однородного уравнения: $y_0 = C_1 \cdot \ell^{-x} + C_2 \ell^{-2x}$.
Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде U = Ax + B.
При подстановке в исходное уравнение получаем: $U' = A$; $U'' = 0$; $U'' + 3U' + 2U = 3A + 2(Ax+B) = 3x$.

Тогда $\begin{cases} 2Ax = 3x \\ 3A + 2B = 0 \end{cases}$.

В итоге: $A = \frac{3}{2}$; $B = -\frac{9}{4}$.

Общее решение: $y = y_0 + U = C_1 \cdot \ell^{-x} + C_2 \cdot \ell^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$.

***Задание**.*

Решить неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - y = 4 \cdot \ell^{x}$.
   Ответ: $y = C_1 \cdot \ell^{x} + C_2 \ell^{-x} + 2x \cdot \ell^{x}$;

2) $y'' + 4y' + 5y = 8 \cos x$.
   Ответ: $y = \ell^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x) + 2(\cos x + \sin x)$;

3) $y'' - 6y' + 9y = 25 \cdot \ell^{x} \cdot \sin x$.
   Ответ: $y = (C_1 + C_2 x) \cdot \ell^{x} + \ell^{x} \cdot (4 \cos x + 3 \sin x)$;

4) $y'' + 8y' = 8x$.
   Ответ: $y = C_1 + C_2 \cdot \ell^{-8x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$;

5) $y'' + 3y' - 10y = x \cdot \ell^{-2x}$.
   Ответ: $x = C_1 \cdot \ell^{2x} + C_2 \cdot \ell^{-5x} + \frac{1}{144}(1-12x)\ \ell^{-2x}$.

РАЗДЕЛ 4

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

12. Случайные события. Вероятность случайного события

12.1. Случайные явления

Теорией вероятностей называется математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Случайное явление – это такое явление, которое в серии однотипных экспериментов под действием случайных факторов может приводить к различным результатам.

В природе нет ни одного явления, которое не было бы под действием случайных факторов.

Примеры:

1. Спортсмен проводит серию выстрелов по мишени. Результаты выстрелов могут отличаться друг от друга, несмотря на постоянство условий стрельбы.
2. Игрок в одинаковых условиях бросает игральную кость. В зависимости от случайных факторов могут выпадать различные цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
3. Автоматический пресс штампует детали. В зависимости от структуры металла, небольших сбоев оборудования и т.д. малое число деталей изготовляется с браком.

Практика показывает, что действие массы случайных факторов определяет свойство ***устойчивости*** случайного явления. Например, частота выпадения грани с цифрой 3 при многократном бросании игральной кости приближается к 1/6. Частота выпадения "решки" при многократном бросании монеты примерно равна 1/2.

Теория вероятности занимается только такими случайными явлениями, для которых предполагается устойчивость частот.

12.2. Случайные события

Пусть проводится случайный эксперимент, результат которого точно нельзя предугадать заранее. В зависимости от случайных факторов возможны различные исходы этого эксперимента.

Тогда этому эксперименту можно сопоставить ***пространство элементарных событий***, которое включает всевозможные исходы этого эксперимента.

Элементарное событие является одним из элементов этого пространства и определяет один из возможных исходов случайного эксперимента. ***Случайное событие А*** является подмножеством пространства элементарных событий и включает одно или группу элементарных событий, каждое из которых благоприятствует А.

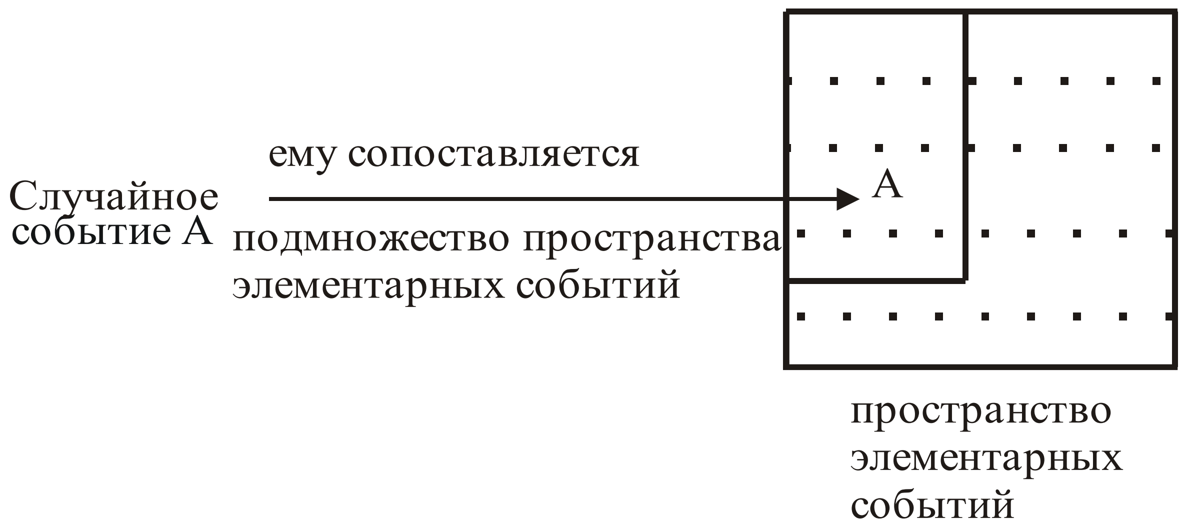


Рис. 34. Геометрическое представление случайного события

Примеры:

1. Опыт – выстрел в мишень. Случайное событие – попадание.
2. Опыт – бросание игральной кости. Рассматривается случайное событие – выпадение четного числа. Ему благоприятствуют элементарные события: выпадение 2, 4, 6.
3. Опыт – вынимание наугад карты из колоды. Рассматривается случайное событие – появление туза. Это событие включает элементарные события: появление туза червь, крест, бубнового туза и туза пик.

12.3. Вероятность случайного события

Рассмотрим случайный эксперимент, в котором наблюдается событие А. Повторим эксперимент n раз и пусть событие А наблюдалось k раз. Отношение $\nu_n = k/n$ называется ***частотой*** события А в этой серии экспериментов.

Если при увеличении n число ν_n стремится к пределу p, то говорят, что событие A устойчиво, а число p является ***вероятностью*** события A. Вероятность p может принимать значения: $0 \le p \le 1$.

Другими словами, если эксперименту можно сопоставить пространство, состоящее из n возможных элементарных исходов этого эксперимента, а случайному событию A благоприятствует k из этих элементарных исходов, то вероятность случайного события A равна

$$p(A) = \frac{k}{n}. \qquad (12.1)$$

Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называют отношение

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \qquad (12.2)$$

где $A \cdot B$ – случайное событие, которое включает элементарные исходы, принадлежащие одновременно событиям A и B.

Группа случайных событий A_1, A_2, ... A_n образуют ***полную группу событий***, если:

а) объединение этих событий включают все возможные элементарные исходы эксперимента,

б) ни одна пара случайных событий не имеет общих элементарных исходов.

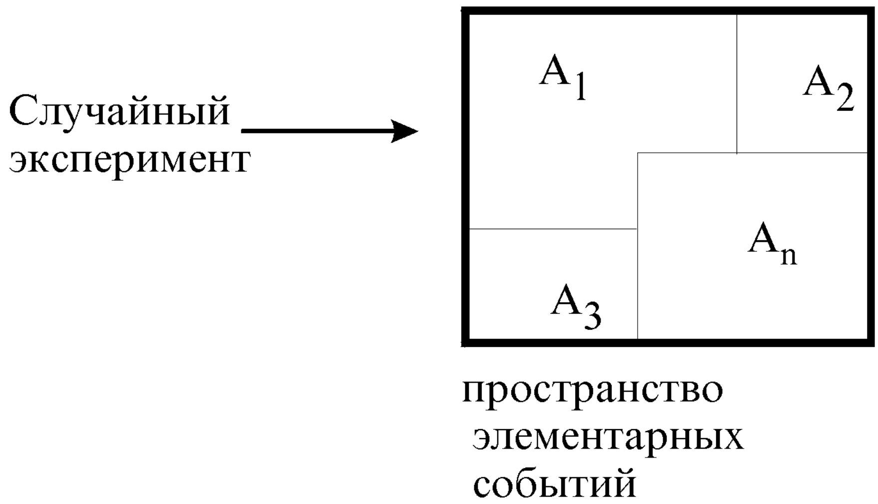


Рис. 35. Полная группа событий A_1, A_2, A_3, …, A_n

Так как объединение событий полной группы является событием достоверным, то для таких событий имеет место равенство:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n) = 1. \qquad (12.3)$$

Два события A_1 и A_2 называются ***независимыми***, если условная вероятность одного из них по отношению к другому равна безусловной вероятности этого же события:

$$P(A_2/A_1) = P(A_2). \qquad (12.4)$$

Для независимых событий вероятность их совмещения равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_2) \cdot P(A_1). \qquad (12.5)$$

Вероятность совмещения n событий, независимых в их совокупности, равна произведению вероятностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots P(A_n). \qquad (12.6)$$

Примеры:

1. Найти вероятность p, что при бросании игральной кости выпадет число, которое делится на 3.

Решение

Пространство элементарных событий включает числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Событию A благоприятствуют исходы, когда выпадают грани с цифрами 3 и 6. Следовательно, число благоприятных исходов $k= 2$. Тогда вероятность $p = 2/6 = 1/3$.

2. Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают 1 карту. Определить вероятность, что вытащен туз.

Решение

Всего возможных исходов $n = 36$.
Событию A благоприятствует, когда вытащен туз пик, крест, туз червей или бубновый туз, всего таких исходов $k = 4$. Тогда вероятность события $p = 4/36 = 1/9$.

3. Монета подброшена два раза. Какова вероятность, что оба раза выпадет герб?

Решение

Событие A_1 – появление в первом опыте герба – и событие A_2 – появление во втором опыте герба – являются независимыми. Причем, $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$.
Для независимых событий вероятность их совместного появления (совмещения) равна:

$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

4. Спортсмен с вероятностью $p_1 = 0{,}9$ преодолевает первое препятствие, с $p_2 = 0{,}8$ – второе и с вероятностью $p_3 = 0{,}85$ – третье препятствие. Найти вероятность P, что он в ходе соревнования преодолеет все три препятствия.

Решение

Все три события являются независимыми, успех или неудача на одном из препятствий не влияют на результат на следующем рубеже соревнования.
Поэтому $P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 0{,}612$.

5. Найти вероятность, что из колоды в 36 карт последовательно будут вытащены два туза.

Решение

Вероятность первого события (из колоды в 36 карт будет вытащен туз) равна $p_1 = 4/36 = 1/9$.
Вероятность второго события (из колоды уже в 35 карт будет вытащен один из трех тузов) равна $p_2 = 3/35$. Тогда вероятность совмещения этих событий равна

$$P = p_1 \cdot p_2 = 1/9 \cdot 3/35 = 1/105.$$

6. Машина участвует в пятидневном автопробеге. Вероятность выхода из строя машины в течение одного дня равна $p = 0{,}05$. Найти вероятность P, что машина ни разу не выйдет из строя в течение всего автопробега.

Решение

Отметим, что $1\text{-}p$ – вероятность, что машина не выйдет из строя в течение одного дня.
Тогда $P = (1\text{-}p)^5$ – вероятность того, что машина не будет иметь поломок за весь автопробег. При малом p можно приближенно оценить $P \approx 1\text{-}5 \cdot p = 0{,}75$.

7. Первая группа состоит из 16 студентов, вторая – из 20. В первой группе учится один отличник, во второй – два. Случайным образом комиссия выбирает по одному человеку из каждой группы. Найти вероятность P, что среди выбранных двух человек окажется только один отличник.

Решение

Такой результат может оказаться в двух случаях, если в эту пару войдет отличник из первой группы, а из второй не войдет. Либо в эту пару войдет отличник из второй группы, а из первой – студент с удовлетворительными оценками.

Тогда $P = P_{отл} \cdot P_{удовл} + P_{удовл} \cdot P_{отл}$,
или $P = 1/16 \cdot (20\text{-}2)/20 + (16\text{-}1)/16 \cdot 2/20 = 3/20$.

ЗАДАНИЕ

1. В пачке 2 фальшивые и 8 настоящих денежных купюр. Из пачки вытащили 2 купюры подряд. Найти вероятность, что обе они фальшивые.
2. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания для первого $p_1 = 0{,}9$, для второго $p_2 = 0{,}8$ и для третьего $p_2 = 0{,}7$. Найти вероятность, что первый и второй попадут в цель, а третий сделает промах.
3. Найти вероятность, что из колоды в 52 карты можно последовательно вытащить тройку, семерку и туз.
4. В барабанном магазине револьвера 8 патронов, один из них холостой. Найти вероятность P, что при трех выстрелах из него два будут боевые, а третий холостой.
5. Производится стрельба ракетами по самолету. Вероятность поражения цели одной ракетой равна $p = 0{,}9$. Найти вероятности:

   а) поражения цели только с третьего выстрела,

   б) промаха первых двух выстрелов,

   в) поражения самолета после первых двух выстрелов.
6. Проводятся испытания прибора. За один час прибор выходит из строя с вероятностью $p = 0{,}05$. Найти вероятность, что прибор выйдет из строя в течение первых трех часов.
   Найти вероятность, что прибор не выйдет из строя ровно на втором часе работы.
7. В первом ящике а = 12 белых и б = 7 черных шаров. Во втором ящике с = 4 белых и в = 6 черных шаров. Из второго ящика перекладывают в первый один шар (без уточнения цвета). Найти вероятность, что после этого при произвольном вытаскивании из первого ящика шара будет вынут белый шар.

12.4. Формула Бернулли. Формула Пуассона

Пусть производится N независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p.

Тогда вероятность того, что событие A появится в этих N испытаниях ровно M раз, выражается ***формулой Бернулли***:

$$P_N(M) = C_N^M \cdot p^M \cdot (1-p)^{(N-M)},$$

$$\text{где } C_N^M = \frac{N!}{M! \cdot (N-M)!}. \qquad (12.7)$$

Если p отлично от 0 или 1, то наивероятнейшее число M_0 наступлений события A в серии из N испытаний равно

$$N \cdot p - g < M_0 < N \cdot p + p,$$

где $g = 1 - p$.

Если число испытаний N велико, а вероятность появления события A $p \sim 0$, то, обозначив $N \cdot p = a$, получаем ***формулу Пуассона***:

$$P(M) = \frac{a^M \cdot EXP(-a)}{M!}. \qquad (12.8)$$

Формула Пуассона определяет вероятность появления события A ровно M раз в большой серии испытаний с малой вероятностью наступления этого события в каждом эксперименте.

Примеры:

1. Баскетболист попадает в корзину со штрафного броска с вероятностью p= 4/5. Найти вероятность P, что в серии из N = 5 бросков он попадет ровно M = 4 раза.

Решение

Согласно формуле Бернулли:

$$P_5(4) = 5!/(4! \cdot 1) \cdot (4/5)^4 \cdot (1/5)^1 \approx 0{,}41.$$

Наивероятнейшее число попаданий равно:

$$5 \cdot 4/5 - 1/5 < M_0 < 5 \cdot 4/5 + 4/5, \text{ т.е. } 3 < M_0 < 5.$$

2. Проверку на допинг-контроль успешно проходит 99% спортсменов. Найти вероятность, что при проверке 100 спортсменов будет получен только один положительный результат.

Решение

Вероятность положительного результата при проверке одного спортсмена $p = 1 – 0{,}99 = 0{,}01$.
В этом случае $a = 100 \cdot 0{,}01 = 1$.

Тогда $P(1) = 1 \cdot EXP(-1)/1 \approx 1/2{,}7 \approx 0{,}4$.

3. Завод изготовляет детали с браком 0,1%. Найти вероятность, что при выборе 200 деталей брак будет обнаружен два раза.

Решение

В этом случае $a = 200 \cdot 0{,}001 = 0{,}2$.

Тогда

$$P(2) = (0{,}2)^2 \cdot EXP(-0{,}2)/2 \approx 0{,}02.$$

12.5. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Формула полной вероятности

Если $A_1, A_2, .. A_n$ – полная группа событий, то для любого случайного события B из этого пространства элементарных событий выполняется:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_i). \qquad (12.9)$$

***Пример** 1:*

Турист равновероятно выбирает один из трех маршрутов: конный, водный и горный. Вероятность, что он успешно преодолеет путь при выборе конного способа передвижения, равна $P_1 = 0{,}8$, при выборе водного пути – $P_2 = 0{,}9$. При выборе горного маршрута $P_3 = 0{,}4$. Найти вероятность P, что турист успешно преодолеет весь путь при любом выборе маршрута.

Решение

Поскольку выбор маршрута равновероятен, то вероятности выбора каждого маршрута $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. По формуле полной вероятности:

$$`P = P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 = (1/3)0{,}8 + (1/3)0{,}9 + (1/3)0{,}4 \approx 0{,}7.$$

***Пример** 2:*

В группе студентов 12 юношей и 8 девушек. Экзамен по математике сдает, как правило, 70 % юношей и 80 % девушек. Найти вероятность того, что первый человек, вышедший из аудитории, сдал экзамен по математике.

Решение

Вероятность того, что первый вышедший из аудитории является юношей, равна $p_1 = 12/(12+8) = 3/5$. То, что выйдет девушка, $p_2 = 8/(12+8) = 2/5$. Вероятность, что юноша сдаст экзамен $P_1 = 0,7$. Вероятность, что экзамен сдаст девушка, равна $P_2 = 0,8$. Тогда искомая вероятность сдачи экзамена человеком, первым вышедшим из аудитории, равна

$$P = P_1 p_1 + p_2 P_2 = 3/5 \cdot 0,7 + 2/5 \cdot 0,8 \approx 0,74.$$

Формула Бейеса

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – полная группа событий. Тогда для любого случайного события B вероятность, что оно произойдет при условии, что произошло событие A, определяется соотношением

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B/A_k)}. \qquad (12.10)$$

***Пример** 3:*

В условиях примера 1 стало известно, что турист успешно добрался до конца своего маршрута. Найти вероятность P(2/A), что он воспользовался водным маршрутом.

Решение

По формуле Бейеса

$$P(2/A) = \frac{P_2 p_2}{P_1 p_1 + p_2 P_2 + P_3 p_3} = \frac{1/3 \cdot (0,9)}{1/3(0,8+0,9+0,4)} = \frac{0,9}{0,8+0,9+0,4} \approx 0,42$$

***Пример** 4:*

В условиях примера 2 стало известно, что человек, вышедший из аудитории, сдал экзамен. Найти вероятность P(1/A),что это юноша.

Решение

По формуле Бейеса

$$P(1/A) = \frac{P_1 p_1}{P_1 p_1 + P_2 p_2} = \frac{0,7 \cdot (3/5)}{0,7 \cdot (3/5) + 0,8(2/5)} \approx 0,55.$$

ЗАДАНИЕ

1. Лекарство с вероятностью p=0,8 излечивает болезнь. Найти вероятность, что из 6 больных, принявших лекарство, вылечатся ровно 4 человека.
2. Среди семян ржи имеется 0,5 % семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить 5 семян сорняков.
3. Банк с вероятностью p_1=0,7 готов вложить свои финансы в ГКО и с вероятностью p_2 =0,3 предложить кредит крупной торговой фирме. В первом случае вероятность финансового успеха составляет p_{11}= 0,9, а во втором случае p_{21} = 0,8. Найти вероятность финансового успеха при участии в этих финансовых операциях.
4. Если в условиях предыдущей задачи получена неудача, то определить вероятности, что она произошла на рынке ГКО или в результате невозврата кредита торговой фирмой.

13. Случайная величина

13.1. Определение случайной величины

Рассмотрим случайный эксперимент, которому сопоставляется пространство элементарных событий – возможных исходов этого эксперимента. На этом пространстве элементарных событий задана ***случайная величина*** *X*, если задан закон или правило, по которому каждому элементарному событию сопоставляется число. Таким образом, случайную величину X можно рассматривать как функцию, заданную на пространстве элементарных событий.

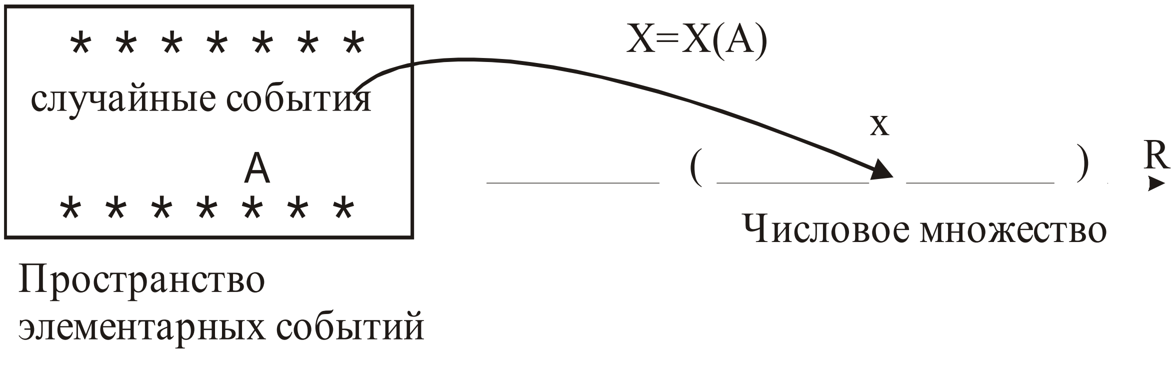


Рис. 36. Определение случайной величины

Случайная величина может принимать значения из некоторого числового множества, однако заранее неизвестно, какое именно. Случайные величины принято обозначать большими буквами X, У, и т.д. , а принимаемые ими значения – строчными буквами x, y, ... Например, при бросании игральной кости случайная величина сопоставляет каждой грани этой кости числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Температура тела является случайной величиной и сопоставляет состоянию организма человека определенные значения, измеряемые градусником.

13.2. Непрерывные и дискретные случайные величины

Если случайная величина X принимает только дискретные значения, т.е. значения x_1, x_2, ..., x_n, ..., то такая случайная величина называется ***дискретной***.

Если же значения случайной величины X занимают некоторый отрезок (c, d), то она называется ***непрерывной***.

Соотношение, которое устанавливает связь между возможными значениями случайной величины X и вероятностями их появления при испытаниях, называется ***законом распределения случайной величины.***

Каждому значению дискретной случайной величины x_n отвечает вероятность p_n. Тогда закон распределения дискретной случайной величины обычно задается ***рядом распределения***:

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	....	p_n

При этом, $p_1 + p_2 + p_3 + ... p_n = 1$.

Пусть непрерывная случайная величина X принимает значения на отрезке (c, d). Тогда говорят о вероятности $P(a < X < b)$ ее попадания на промежуток (a, b), который принадлежит отрезку (c, d).

Закон распределения непрерывной случайной величины удобно задавать при помощи так называемой ***функции плотности вероятности*** – f(x). В этом случае вероятность $P(a < X < b)$ попадания случайной величины X на промежуток (a, b) определяется равенством:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{13.1}$$

График функции f(x) называется *кривой распределения*. Геометрически вероятность попадания случайной величины X в промежуток (a, b) равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения y = f(x), осью Ox и прямыми x = a и x = b (рис.37).

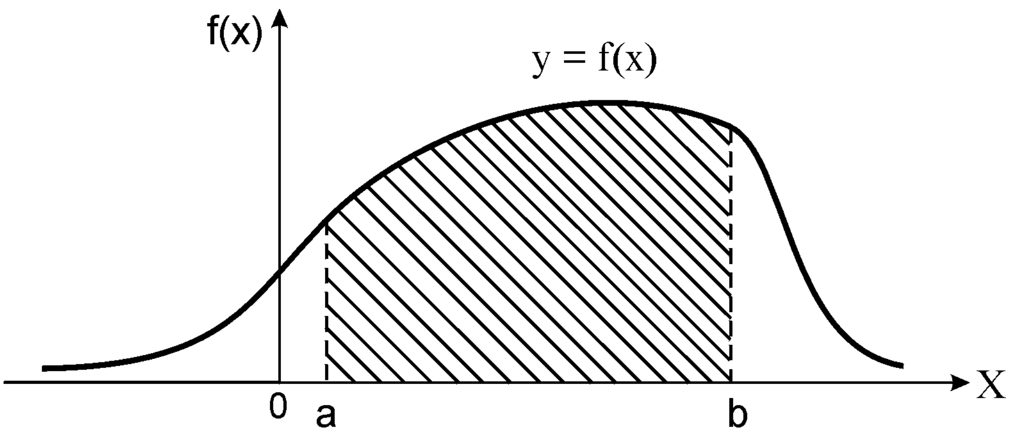


Рис. 37. Кривая распределения y = f(x)

Функция плотности вероятности f(x) обладает следующими свойствами:

1. $f(x) \geq 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$.

Введем теперь функцию распределения вероятности F(x) = P(X < x). Функция F(x) существует как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Для непрерывных случайных величин F(x) следующим образом связана с функцией плотности вероятности:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad (13.2)$$

Свойства функции распределения вероятности:

1. F(x) – неубывающая функция.
2. $F(-\infty) = 0$.
3. $F(+\infty) = 1$.

Для непрерывных и дискретных случайных величин функции распределения вероятности имеют вид (рис. 38).

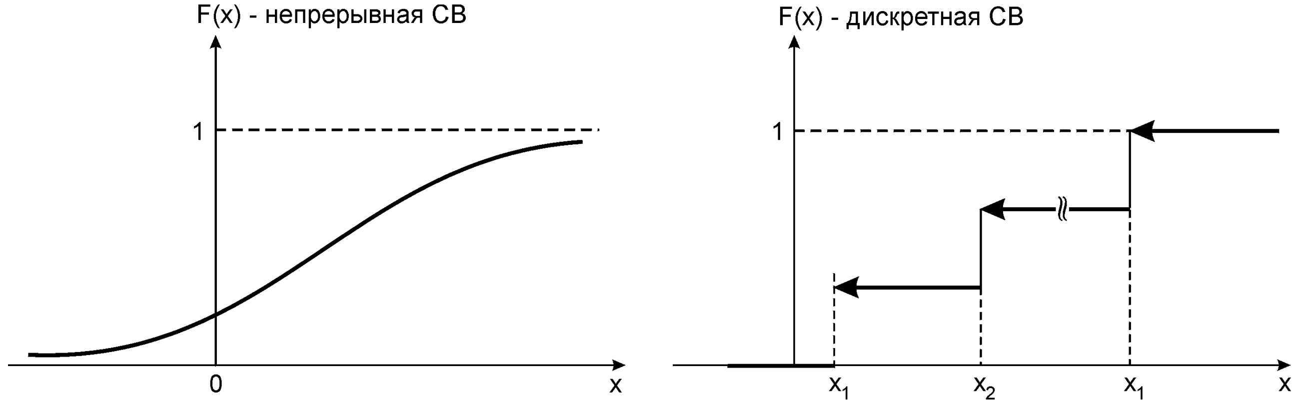


Рис. 38. Функция распределения вероятности F(x) для непрерывных и дискретных СВ

Примеры:

1. Случайная величина X имеет закон распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ a \cdot (2x - x^2), \text{ при } 0 < x \le 2 \\ 0, \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Требуется найти:

1) коэффициент "a";
2) построить график распределения плотности y = f(x);
3) найти вероятность, что случайная величина X попадет в промежуток (0,5; 1).

Решение

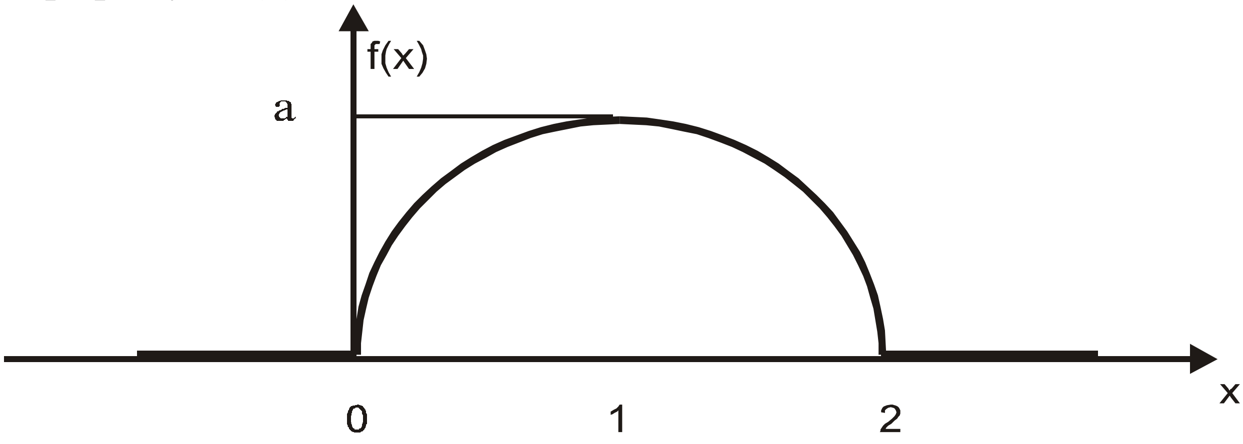
1. Согласно свойствам функции плотности вероятности f(x)

$$\int_0^2 a \cdot (2x - x^2)\, dx = 1.$$

Проводя интегрирование, получаем:

$$a\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = a \cdot \left(4 - \frac{8}{3}\right) = 1, \text{ откуда } a = 3/4.$$

2. График y = f(x) имеет вид:



3. Вероятность попадания величины X на интервал (0, 5, 1) равна

$$P(0{,}5 < X < 1) = \int_{0,5}^{1} 3/4 \cdot (2x - x^2)\,dx = 3/4 \cdot (x^2 - x^3/3) \Big|_{0,5}^{1} = \frac{11}{32}.$$

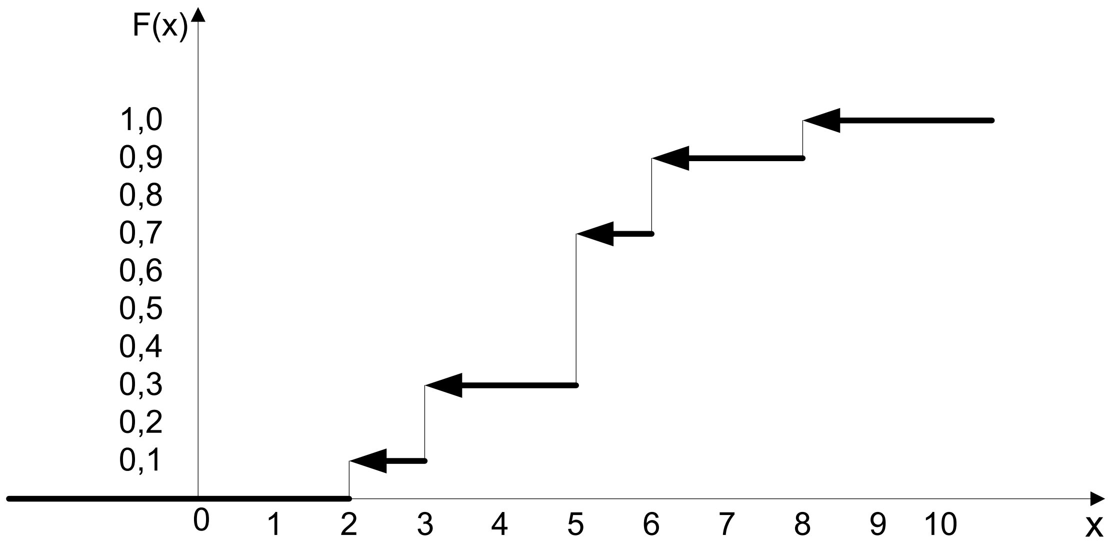
2. Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

x_i	2	3	5	6	8
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Построить функцию распределения вероятности этой случайной величины X.

Решение

Если $x \le 2$, то $F(x) = P(X < x) = 0$.
Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1$.
Если $3 < x \le 5$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.
Если $5 < x \le 6$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7$.
Если $6 < x \le 8$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}9$.
Если $x > 8$, то $F(x) = 0{,}9 + 0{,}1 = 1$.



13.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Функция распределения вероятности F(X) полностью характеризует случайную величину X. Однако получить в аналитическом виде такую характеристику случайной величины довольно сложно, да и не всегда это нужно. Между тем, для решения многих задач достаточно знать ***числовые характеристики*** случайной величины. К ним относятся: математическое ожидание, дисперсия, моменты, мода и медиана и т.д. Отметим главные из них.

Математическое ожидание M(X) случайной величины X можно считать центром распределения этой случайной величины.

Определение. Если X – дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то ***математическое ожидание M(X)*** определяется по формуле:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i. \qquad (13.3)$$

Определение. Пусть непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности f(x), тогда ***математическое ожидание*** M(X) непрерывной случайной величины X равна:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx. \qquad (13.4)$$

Дисперсия D(X) случайной величины X характеризует степень разброса значений этой величины около ее математического ожидания.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X\text{-}M(X)]^2. \qquad (13.5)$$

Если ввести обозначение M(X) = m, то формула для вычисления дисперсии дискретной случайной величины X запишется в виде:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - m)^2. \qquad (13.6)$$

Для непрерывной случайной величины X дисперсия запишется в виде:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \cdot f(x)\,dx. \qquad (13.7)$$

Примеры:

1. Случайная величина X характеризуется рядом распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Определить математическое ожидание и дисперсию.

Решение

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 = 1{,}3.$$

Дисперсия:

$$D(X) = 0{,}2\cdot(0-1{,}3)^2 + 0{,}4\cdot(1-1{,}3)^2 + 0{,}3\cdot(2-1{,}3)^2 + 0{,}1\cdot(3-1{,}3)^2 = 0{,}8.$$

ЗАДАНИЕ

1. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = 1 - EXP(-x/T) \quad (x > 0, T – \text{константа})$$

Построить график функции плотности вероятности f(x) и вероятность попадания величины X на интервале (1, 2).

2. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности $f(x) = x/2$ в интервале (0,2). Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить функцию распределения случайной величины. Определить математическое ожидание и дисперсию величины X.

4. Случайная величина имеет ***равномерное распределение*** с плотностью распределения $f(x) = 1/(b-a)$ при $a < x < b$, $f(x) = 0$, когда x вне этого интервала.

Построить функцию распределения этой величины и вероятность ее попадания на интервал (0,1).

13.4. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot EXP[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}]. \qquad (2.8)$$

Математическое ожидание СВ с нормальным законом распределения M(X)= m, дисперсия D(X) = σ^2.

Кривая y = f(x) имеет вид, представленный на рисунке 39.

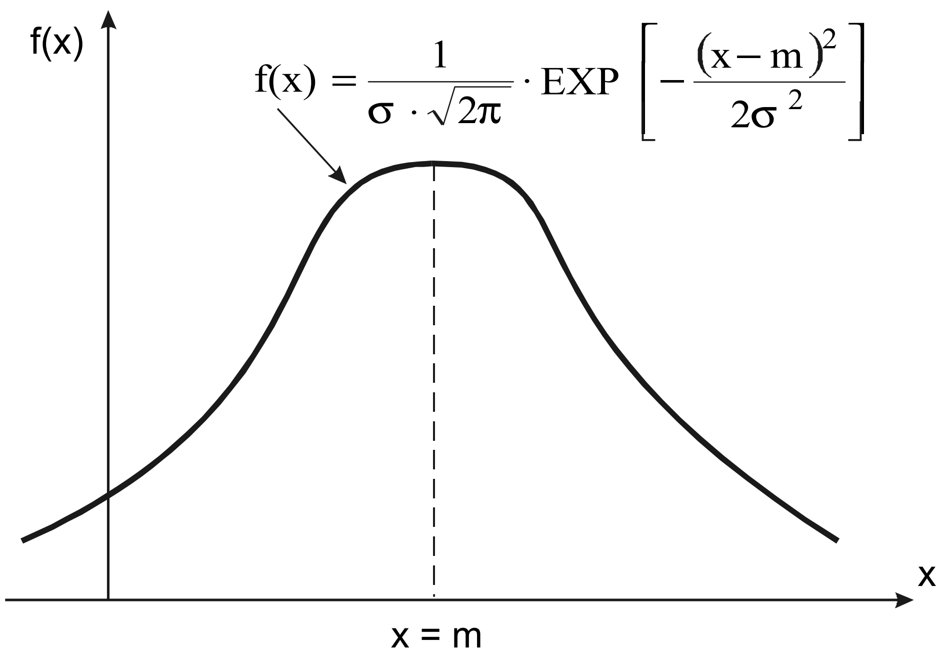


Рис. 39. Кривая распределения СВ с нормальным законом распределения

Введем обозначение функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x EXP(-t^2/2)\,dt, \qquad (13.9)$$

называемой функцией Лапласа (или интегралом вероятностей).

С помощью этой функции вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X на интервал (a, b) выражается простой формулой:

$$P(a < X < b) = \Phi[(b - m)/\sigma] - \Phi[(a - m)/\sigma]. \qquad (13.10)$$

Для вычисления функции Лапласа используются специальные таблицы.

В экономике и технике многие величины являются случайными величинами с нормальным законом распределения. Это объясняется тем, что эти величины образуются в результате суммирования многих случайных величин: $X = \sum X_i$ и согласно ***центральной предельной теореме*** имеют закон распределения, близкий к нормальному.

Теорема (центральная предельная теорема).

Каковы бы ни были законы распределения отдельных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, закон распределения их суммы $X = \sum X_i$ будет близок к нормальному при увеличении числа n слагаемых случайных величин.

Теорема Муавра-Лапласа.

Пусть проводится большое число N независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равно р. Тогда для оценки вероятности того, что событие А в этих N испытаниях появится не менее М и не более К раз, используется формула:

$$P(M < X < K) = \Phi\left[\frac{K - N\cdot p}{\sqrt{N\cdot p(1-p)}}\right] - \Phi\left[\frac{M - N\cdot p}{\sqrt{N\cdot p(1-p)}}\right]. \quad (2.11)$$

Пример:

Вероятность выхода из строя детали во время испытаний $p = 0{,}05$. Какова вероятность, что при испытании N=100 деталей из строя выйдет от 5 до 10 деталей?

Решение

$$P(5 < X < 10) = \Phi[(10 - 100\cdot 0{,}05)/(\sqrt{100\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95})] -$$

$$\Phi[(5 - 100\cdot 0{,}05)/(\sqrt{100\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95})] = \Phi(5/\sqrt{4{,}75}) = \Phi(2{,}3) = 0{,}49$$

13.5. Закон больших чисел

При определении вероятности случайного события было отмечено, что при увеличении числа испытаний средний их результат становится ***устойчивым***, при этом частота приближается к вероятности случайного события, а среднее арифметическое наблюдений за какой-либо случайной величиной X – к ее математическому ожиданию M(X).

Эти положения легли в основу ***закона больших чисел***:

при большом числе испытаний средний их результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

В аналитической форме закон больших чисел опирается на ***неравенство Чебышева***: для любой случайной величины X, имеющей математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X), справедливо неравенство:

$$P\{|X - M(X)| \geq \alpha\} \leq \frac{D(x)}{á^2}. \qquad (13.12)$$

Пользуясь неравенством Чебышева, оценим вероятность того, что случайная величина X будет отклонена от своего математического ожидания более чем на 3σ, где $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

В этом случае имеем:

$$P\{|X - M(X)| \geq 3\cdot\sigma^2\} \leq \sigma^2/(3\cdot\ б)^2 = 1/9. \qquad (13.13)$$

То есть для любой случайной величины X вероятность P ее попадания на расстояние от математического ожидания, большее чем "три сигмы", оказывается меньшим 1/9.

ЗАДАНИЕ

1. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, ее математическое ожидание m = 10, а дисперсия D(X) = 1. Найти вероятность попадания величины X на интервал (8, 12).
2. Вероятность поражения мишени при одном выстреле p = 0,8. Найти вероятность, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 75 до 85 раз.
3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность, что $P\{|X-M(X)| < 0{,}2\}$, если D(X) = 0,01.
4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	3
p	0,2	0,6	0,2

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность, что $|X - M(X)| < 0{,}2$.

14. Элементы математической статистики

14.1. Основные задачи математической статистики

Математическая статистика занимается разработкой приемов статистических наблюдений и анализом статистических данных.

Основные задачи математической статистики:

1. Задача ставится так: в результате N независимых испытаний над случайной величиной X получены следующие ее значения:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Требуется определить, хотя бы и приближенно, неизвестную функцию распределения F(x) этой случайной величины.

2. Пусть из общих соображений известная функция распределения F(x) некоторой случайной величины. По результатам N независимых испытаний: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ требуется оценить параметры этого распределения и точность этих оценок. Например, установить числовые значения математического ожидания и дисперсии этой случайной величины X.

3. Задача ставится так: на основании некоторых соображений выдвигается гипотеза о виде распределения или о параметрах распределения некоторой случайной величины. Спрашивается, совместимы ли результаты наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с выдвинутой гипотезой.

14.2. Выборка. Оценка параметров выборки

Пусть в результате N независимых испытаний получаем значения случайной величины X: $x_1, x_2, \ldots x_n$ – это ***выборка объема*** *N* ***из генеральной совокупности с рапределением*** *F(x)*. Запишем эту последовательность в виде ***вариационного ряда***:

$$x_1 \le x_2 \le \ldots x_n.$$

Построим ***эмпирическую функцию распределения*** *F(x)*:

$$F_n(x) = \begin{cases} O, \text{ при } x \le x_1 \\ \frac{k}{n}, \text{ при } x_к < x \le x_{к+1}, \\ 1, \text{ при } x > x_n \end{cases} \qquad (14.1)$$

Тогда функция $F_n(x)$ – монотонна, непрерывна слева, имеет конечное число точек разрыва со скачками 1/n (рис. 40).

Согласно теореме Гливенко при увеличении числа независимых испытаний происходит сближение эмпирической функции распределения $F_n(x)$ с теоретической функцией распределения F(x).

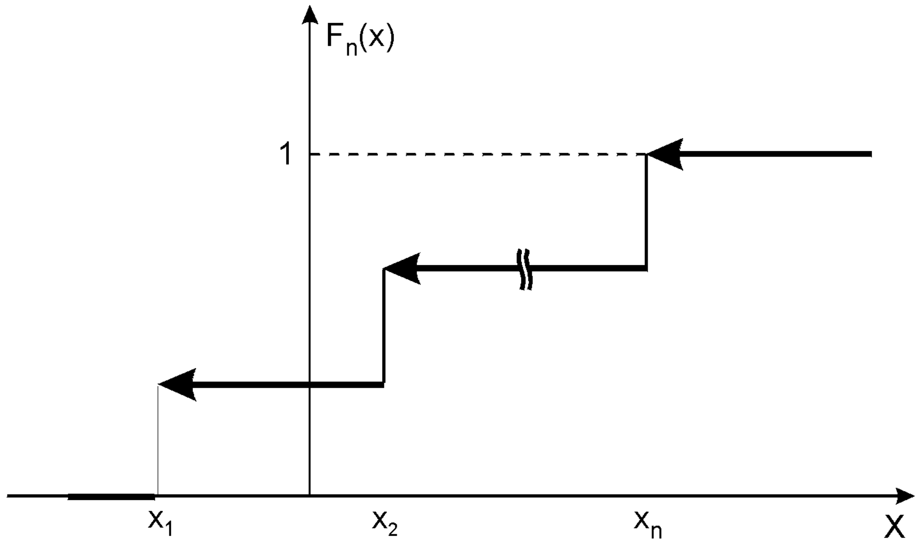


Рис. 40. Эмпирическая функция распределения $F_n(x)$

Естественной оценкой математического ожидания случайной величины X является:

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \tag{14.2}$$

дисперсии: $$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2}{n-1}. \tag{14.3}$$

14.3. Проверка статистических гипотез

Пусть требуется статистическая проверка гипотезы H о том, что данная выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ извлечена из генеральной совокупности с функцией распределения F(x).

Выборку можно рассмотреть как точку n-мерного пространства, которое делится на две области (рис. 41):

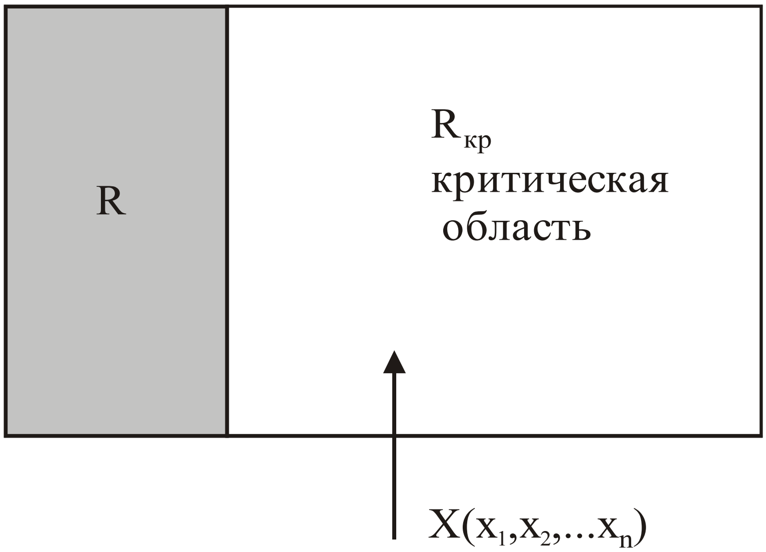


Рис. 41. Критическая область $R_{кр}$

Если точка с координатами (x_1, x_2, …, x_n) попадает в $R_{кр}$, то гипотеза отвергается.

Если же эта точка попадает в $R_{кр}$, то гипотеза принимается.

При этом возможны следующие ***ошибки***:

1) ошибка первого рода – отвергнуть верную гипотезу;

2) ошибка второго рода – принять неверную гипотезу.

Критическая область $R_{кр}$ выбирается таким образом, чтобы минимизировать ошибки первого и второго рода.

14.4. Корреляционный анализ

Рассмотрим случай, при котором какие-то факторы X_1, X_2, …, X_n оказывают влияние на признак Y.

Например, количество выпавших осадков за сезон (X_1), средняя температура (X_2) оказывают влияние на урожай картофеля (Y) в конкретном хозяйстве.

Задача ***корреляционного анализа*** – установление степени влияния факторов на признак. Корреляционный анализ позволяет выявить неизвестные связи между факторами и признаком, установить факторы, оказывающие наибольшее влияние на изменение значений признака.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда фактор X влияет на признак Y.

По данным парных экспериментальных замеров получаем ***корреляционную таблицу***:

X	x_1	x_2	x_3	………..	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	………..	y_n

Для количественной оценки тесноты связи между X и Y используют ***коэффициент корреляции***:

$$R_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \tag{14.4}$$

где: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$,

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 , \ \sigma_x{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \tag{14.5}$$

Коэффициент R_{xy} принимает значения от -1 до +1.

Принято считать, что если

$|R_{xy}| < 0{,}3$, то корреляционная связь слабая,

$|R_{xy}| = 0{,}3 \div 0{,}7$ - средняя,

$1 \geq |R_{xy}| > 0{,}7$, то корреляционная связь сильная.

При коэффициенте корреляции $R_{xy} > 0$ возрастание X приводит к росту и Y и, наоборот, уменьшение значений X приводит к снижению значений и Y.

И наоборот, если $R_{xy} < 0$, то изменение X в одну сторону приводит к противоположному изменению Y.

Если на признак Y действует несколько факторов, то рассматривают тесноту связи между изменениями всех факторов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и изменениями Y.

14.5. Регрессионный анализ

Регрессионный анализ предназначен для представления влияния факторов X_1, X_2, …, X_n на признак Y в виде ***уравнения регрессии***:

$$У = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{14.6}$$

В случае парной корреляции, т.е. влияния одного фактора X на признак Y, уравнение регрессии выбирают в виде:

$y = a_0 + a_1 \cdot x$, или

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2, \text{ или} \tag{14.7}$$

$$y = a_0 \cdot EXP(a_1 \cdot x).$$

В случае множественной линейной регрессии в качестве модели выбирают уравнение вида:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n. \qquad (14.8)$$

Для определения неизвестных коэффициентов a_0 или a_1 применяют ***метод наименьших квадратов*** (МНК).

Согласно этому методу коэффициенты a_0 и a_1 должны быть выбраны такими, чтобы обеспечить наименьшее значение сумме квадратов отклонений теоретических значений уравнения регрессии от ее экспериментальных значений, выбранных из корреляционной таблицы. То есть требуется выполнение условия:

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_i, a_0, a_1) - y_i]^2 = \min. \qquad (14.9)$$

Графически отклонения теоретических значений признака от его замеров можно представить следующим образом (рис. 42).

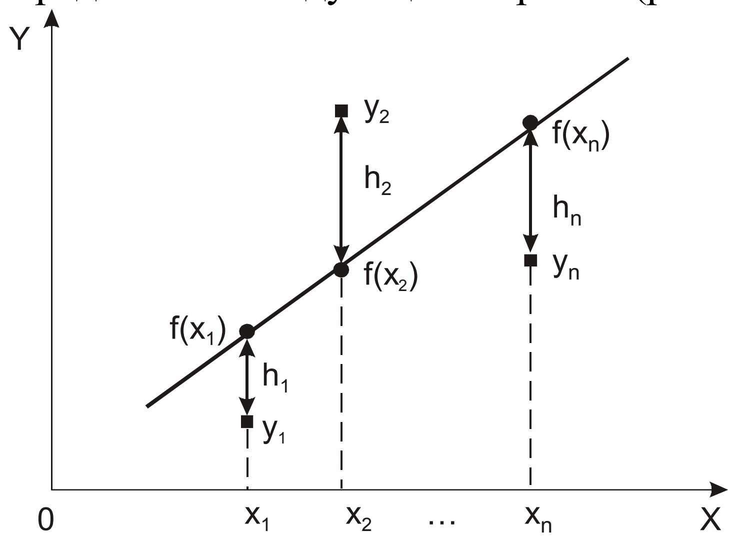


Рис. 42. Геометрическая интерпретация МНК

Согласно МНК требуется, чтобы

$$h_1^2 + h_2^2 + ... + h_n^2 = \min. \qquad (14.10)$$

На примере регрессионного уравнения $y = a_0 + a_1 \cdot x$ рассмотрим применение МНК для определения неизвестных коэффициентов a_0 и a_1.

Запишем функционал:

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i)^2 = \min. \qquad (14.11)$$

Для определения минимального значения функционала $F(a_0, a_1)$ необходимо приравнять его частные производные по переменным a_0 и a_1 нулю.

В результате получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i = 0 \tag{14.12}$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_0 и a_1:

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \tag{14.13}$$

Пример:

Выработка бригады (Y) зависит от ее численности (X) согласно следующей таблице:

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	5	11	14	21	24	31	34	41

Определить коэффициент корреляции R_{xy} между этими случайными величинами и построить линейное уравнение регрессии.

Решение

По формулам параграфа (3.4) находим:

$$\bar{x} = 4{,}5; \; \bar{y} = 22{,}6;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x \cdot y/n = 128; \; \bar{x} \cdot \bar{y} = 101{,}7;$$

$$ó_x = 2{,}45; \; ó_y = 12{,}3.$$

Окончательно, $R_{xy} = \dfrac{128 - 101{,}7}{2{,}45 \cdot 12{,}3} = 0{,}88.$

Далее для определения коэффициентов a_0 и a_1 в выбранном линейном регрессионном уравнении:

$$y = a_o + a_1 \cdot x$$

воспользуемся формулами параграфа 3.5.

В результате получаем:

$$\begin{cases} 8 \cdot a_0 + 36 \cdot a_1 = 181 \\ 36 \cdot a_0 + 204 \cdot a_1 = 1024. \end{cases}$$

В результате решения этого уравнения получаем $a_0 = 0$, $a_1 = 5$. Таким образом, регрессионное уравнение примет вид:

$$y = 5 \cdot x.$$

ЗАДАНИЕ

1. Определить коэффициент корреляции и построить уравнение регрессии между случайными величинами X и Y, заданных таблицей:

x	2	4	6	8	10	12
y	4	7	13	15	19	25

2. Построить систему линейных уравнений для определения МНК коэффициентов a_0 и a_1 при выборе регрессионного уравнения в виде: $y = a_0 + a_1 \cdot x^2$.

14.6. Временные ряды

Временные (динамические) ряды представляют собой числовые данные, характеризующие исследуемые процессы и явления. В зависимости от порядка их регистрации ряды динамики являются ***дискретными*** или ***непрерывными***.

Дискретные ряды получаются путем регистрации данных через определенные промежутки времени – через месяц, год и т.д.

Непрерывные ряды динамики получаются в случае непрерывной записи изменения явления.

На практике чаще всего встречаются дискретные представления исследуемых процессов. В этом случае ряд динамики можно представить в виде

Уровень ряда	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Время	t_1	t_2	t_3	…	t_n

При анализе временных рядов пользуются статистическими показателями, определяющими характер и интенсивность количественных изменений явлений. К этим показателям относятся: уровень ряда, средний уровень, абсолютный прирост, темпы роста и прироста, автоковариация и автокорреляция.

Уровнем ряда *(x_i)* является каждый член ряда динамики. Различают начальный (x_0), конечный (x_n) и средний ($x_{ср}$) уровни ряда. Уровень ряда, относительно которого предполагается рассматривать изменение процесса, выбирается в качестве базисного ($x_б$).

Абсолютный прирост *($d_{i\,б}$, d_i)* характеризует размер изменения исследуемого явления во времени и определяется разностью двух уровней. Абсолютные приросты могут быть базисными и цепными:

$$d_{i\,б} = x_i - x_б,\ d_i = x_i - x_{i-1}, \qquad (14.14)$$

где x_i – уровень ряда в период i, $x_б$ – уровень ряда в базисный период.

Темпом роста *($k_{i\,б}$, k_i)* является отношение двух уровней ряда динамики, выраженное в процентах. Различают базисные и цепные темпы роста:

$$K_{iб} = \frac{x_1}{x_б} \cdot 100\%; \qquad K_i = \frac{x_i}{x_{i-1}} \cdot 100\%. \qquad (14.15)$$

Темпом прироста ***($T_{iб}$, T_i)*** называется отношение абсолютного прироста к базисному или предыдущему уровню, выраженное в процентах:

$$T_{iб} = \frac{d_{iб}}{x_б} \cdot 100\%; \qquad T_i = \frac{d_i}{x_{i-1}} \cdot 100\%. \qquad (14.16)$$

Темпы роста и прироста связаны следующим образом:

$$K_i = T_i + 100. \qquad (14.17)$$

Исследование рядов динамики в целях анализа и прогнозирования является довольно сложной проблемой, решение которой требует применения различных методов обработки и статистического анализа.

При статистическом подходе к исследованию и моделированию явлений особое место занимает корреляционный и регрессивный анализ. Применение корреляционного и регрессионного анализа требует соблюдения ряда известных условий этих методов.

Основной предпосылкой можно считать то, что изучаемая совокупность должна быть случайной выборкой из бесконечной генеральной совокупности, в этом случае анализ временных рядов принципиально ничем не отличается от анализа данных случайной выборки.

Кроме того, требуется выполнение условий независимости, случайности и нормального распределения данных наблюдений.

Следует отметить, что в результате корреляционного анализа рядов динамики, имеющих вполне определенные тенденции развития, получаются завышенные значения показателей корреляции (проблема ложной корреляции). Это объясняется тем, что в результате анализа сопоставляются не случайные колебания, а статистические совокупности особого рода – реализация детерминированных частей и случайных процессов.

Для исследования временных рядов и выявления причин их вариации вокруг определенного уровня используются методы теории случайных процессов.

При анализе временных рядов исходят из расчленения динамики процесса на три составляющие, которые связаны между собой аддитивно:

1) Тенденция (тренд) $x_{тр}(t)$, представляющая собой долговременное направление развития процесса.

2) Систематические периодические колебания $g(t)$, связанные с влиянием сезонности или цикличности развития процесса.

3) Случайная составляющая $z(t)$, которая является результатом влияния на динамику процесса случайных факторов.

Следует отметить, что не всегда ряды динамики состоят из всех рассмотренных компонент. Единственной составляющей, которая всегда встречается в рядах, является случайная составляющая $z(t)$, но и она может быть только в сочетании с одним или обоими составляющими.

В результате ряд динамики представим в виде:

$$x(t) = x_{тр}(t) + g(t) + z(t). \tag{14.18}$$

Геометрическая интерпретация модели (14.18) ряда динамики представлена на рисунке 43.

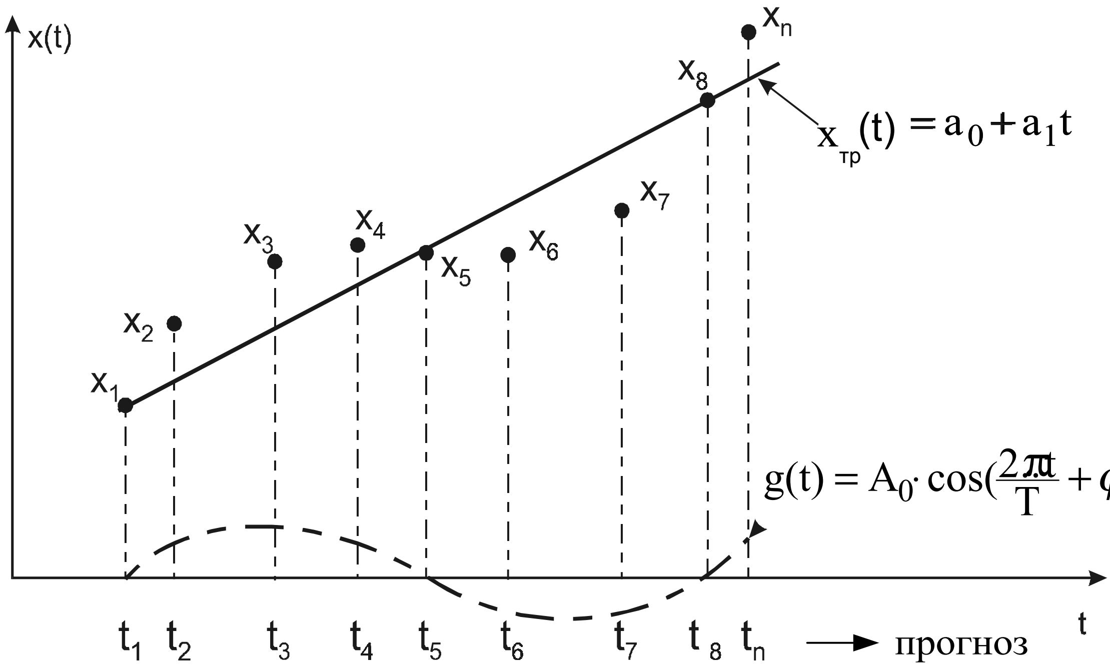


Рис. 43. Временной ряд $x_i = x(t_i)$ и его составляющие

Процедуру статистического анализа рядов динамики целесообразно подразделять на три компоненты:

1-я стадия – определение характеристик исследуемых рядов и их разложение на три составляющие;

2-я стадия – всесторонний анализ отдельных составляющих и разработка модели процесса;

3-я стадия – прогнозирование исследуемого ряда динамики на основе полученной модели.

1. Анализ тренда.

Важнейшей задачей анализа временных рядов является определение основной закономерности изменения изучаемого явления во времени. Обычно считают, что основная тенденция (тренд) есть результат влияния комплекса причин, действующих постоянно на изучаемый процесс в течение длительного периода, т.е. она характеризуется детерминированной составляющей временного ряда.

Для решения этой задачи применяются различные методы сглаживания, наиболее известным из которых является метод наименьших квадратов. Согласно МНК в качестве тренда выбирается кривая $y = f(t)$, сумма квадратов расстояния от точек которой до уровней ряда x_i ($i = 1, 2 \ldots n$) является минимальной.

Основной проблемой при определении тенденции с помощью МНК является выбор формы кривой $f(t)$. Обычно для решения этой задачи анализируется набор статистических данных или анализируется сам процесс.

2. ***Исследование периодических колебаний.***

Во временных рядах динамики наряду с основными долговременными тенденциями иногда проявляется более или менее регулярные колебания, связанные с цикличностью или сезонностью развития явления.

Для определения периодических колебаний следует прибегать к гармоническому анализу, в котором анализ рядов динамики производится при помощи линейных комбинаций функции времени – синусов и косинусов, причем коэффициенты линейных комбинаций рассматриваются как неизвестные параметры.

Как известно, любой ряд динамики можно с помощью преобразований Фурье представить суммой определенного числа гармоник. Но задача гармонического анализа состоит в определении только основных гармоник, содержащих главные закономерности развития процесса.

Общую задачу гармонического анализа – выявление периодичности процесса – можно сформулировать следующим образом. Допустим, что на конечном интервале (-L, L) задана функция x(t). Выдвигают гипотезу о том, что функция x(t) содержит периодическую компоненту g(t), так что

$$x(t) = g(t) + z(t), \tag{14.19}$$

где z(t) – случайная функция с нормальным распределением.

Задача, по существу, сводится к аппроксимации процесса x(t) процессом y(t) определенным соотношением:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n}[A_k \cdot \cos(\omega_k t) + B_k \cdot \sin(\omega_k t)], \tag{14.20}$$

где неизвестные параметры A_k, B_k и ω_k определяются методом наименьших квадратов, минимизирующим функцию

$$\sum[x(t) - y(t)]^2 \to \min. \tag{14.21}$$

В результате получаем следующие оценки параметров:

$$A_0 = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} x(t)\,dt, \quad A_k = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} x(t) \cdot \cos(2\pi kt/T)\,dt \tag{14.22}$$

$$B_k = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} x(t) \cdot \sin(2\pi kt/T)\,dt$$

Введем амплитуду k-ой гармоники: $R_k = \sqrt{(A_k^2 + B_k^2)}$

Тогда вклад каждой гармоники равен:

– для нулевой и n-ой соответственно R_0^2 и R_n^2,

– для k-й – $2R_k^2$.

*3. **Анализ случайного компонента***.

Случайный компонент является ненаблюдаемым, и его оценку можно получить только косвенно, определив перед этим параметры тенденции и периодических колебаний.

При анализе случайного компонента можно ставить различные цели:

а) проверку соблюдения предпосылок, лежащих в основе применения методов определения оценок параметров тенденций и периодических колебаний (в основном предпосылок МНК):

б) статистический анализ случайного компонента при помощи теории случайных процессов;

в) получение таких остаточных членов, которые можно использовать для многомерного статистического анализа.

Список литературы

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I и II: Уч. пособие для студентов вузов. - М.: Высшая школа, 1980.
2. Карташев А.П. Рождественский Б.Л. Математический анализ.– М.: Наука, 1984. – 448 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 176 с.
4. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные уравнения и основы вариационного исчисления. - М.: Наука, 1980.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения.- М.: Наука, 1988. - 480 с.